Instituto
Balseiro

Ingreso 2025

21 de marzo de 2025
Problemas de la tarde
14:00 – 16:00

Instituto Balseiro

Instituto Balseiro - Ingreso 2025

INSTRUCCIONES

Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, los enunciados de **7** problemas.

- Revisar todas las páginas entregadas, y verificar que estén todas bien impresas.
- Responder cada problema en hojas separadas en forma clara y concisa, y usar la cantidad de hojas que necesite.
- Encabezar adecuadamente *todas* las hojas de respuestas. Por ejemplo, si usted se llama Carlos García, la hoja 2 del total de 3 hojas usadas para resolver el problema 4, deberá encabezarse así, en mayúsculas y claramente: **CARLOS GARCÍA, P4 H2/3.**
- Esta parte del examen dura **3** horas, dando aproximadamente un promedio de **17** minutos por problema. Aconsejamos no demorarse demasiado en problemas que le resulten difíciles.
- Antes de entregar, ordenar y verificar que estén las hojas de todos los problemas y controlar el encabezado de cada una.

¡ÉXITO!

Problema 6 Una computadora genera matrices $A_\epsilon \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ de ceros y unos,

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix},$$

de forma tal que $\epsilon_{ij} = 0$ (ó, equivalentemente, $\epsilon_{ij} = 1$) con probabilidad $\frac{1}{2}$. Cabe aclarar que el valor que toma cada ϵ_{ij} es independiente del valor que toma cualquiera de los otros elementos de la matriz.

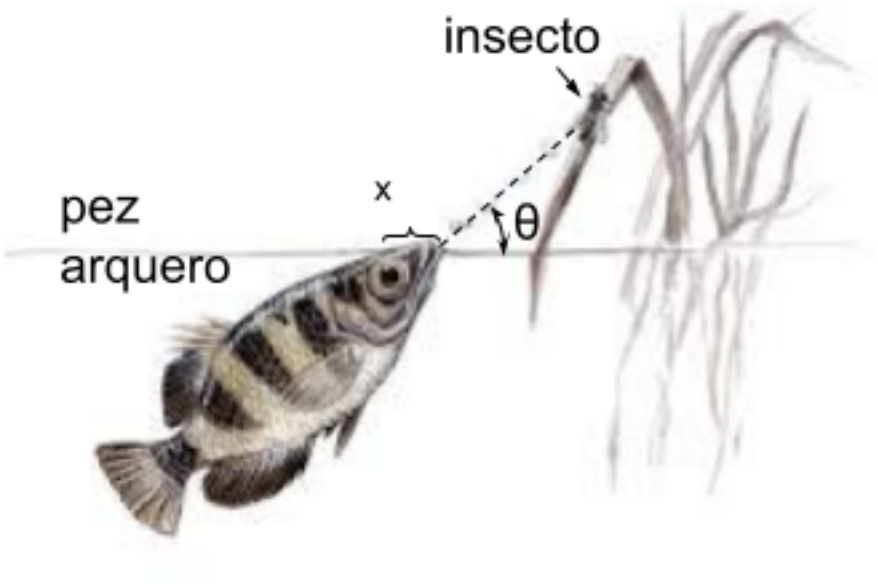
a) Hallar la probabilidad de que A_ϵ sea diagonal.
b) Hallar la probabilidad de que $tr(A_\epsilon) > 0$ (aquí $tr(A_\epsilon)$ denota la traza de la matriz A_ϵ, esto es, la suma de los elementos de la diagonal).
c) ¿Cuál es la probabilidad de que A_ϵ sea diagonal si se sabe que $tr(A_\epsilon) > 0$?

Problema 7 Una pava o tetera eléctrica calienta agua usando el efecto Joule en una resistencia de $R = 32\ \Omega$ enchufada a una fuente de voltaje alterno sinusoidal con una amplitud o valor pico de 311 V.

a) ¿Cuánto tiempo tarda la pava en llevar a ebullición un litro de agua inicialmente a $T = 10\ ^\circ$C?
b) Se coloca el litro de agua recién hervida en un termo, ¿qué masa de hielo a temperatura $T = -18\ ^\circ$C se debe agregar al termo, de capacidad calorífica despreciable, para que la masa final de líquido esté a $T = 80\ ^\circ$C?

Datos: en el rango de temperaturas relevante al problema el calor específico del agua líquida a presión atmosférica es $C = 4{,}2$ J/(g °C), y el del hielo $C = 2{,}1$ J/(g °C). El calor latente de fusión del hielo es 334 J/g.

Problema 8 El pez arquero tiene una estrategia muy particular para cazar insectos. Saca su boca fuera del agua y dispara con gran puntería un chorro de agua a alta presión que impacta sobre el insecto, haciéndolo caer y permitiendo su captura (ver figura). Se ha observado que el ángulo que forma el chorro con la superficie del agua es 72 grados (ángulo θ en la figura). Para posicionarse para el tiro, el pez arquero hace contacto visual con el insecto *manteniendo sus ojos bajo la superficie del agua.*



a) Despreciando la distancia x entre los ojos y la boca del pez, ¿a qué ángulo respecto de la superficie del agua visualiza el pez al insecto?

b) Si no se desprecia x, ¿el ángulo de visión es mayor o menor que el calculado anteriormente?

Datos: el índice de refracción del agua a la temperatura ambiente es aproximadamente $n \approx 4/3$ y el del aire $n \approx 1$.

Problema 9 Sean $U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ y $F \colon U \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, C \sin\theta)\,,$$

donde C es una constante positiva. En lo que sigue, llamaremos *superficie del planeta* a la superficie dada por la imagen de F y *mapa* al conjunto U.

a) Describir la superficie del planeta mediante una ecuación en coordenadas cartesianas (de la forma $f(x, y, z) = 0$). Graficar el planeta para $C = 1/2$.

b) ¿Verdadero o falso? Para $C = 1$, si A_1 y A_2 son dos regiones del mapa que tienen igual área entonces, en el planeta, las áreas de las regiones que representan (es decir, de las regiones $F(A_1)$ y $F(A_2)$) también son iguales. Justificar la respuesta.

Problema 10 Se tiene un plano aislante infinito con una densidad de carga eléctrica uniforme σ. Se introduce una partícula puntual con carga q y velocidad inicial $\vec{v}_0$ paralela al plano, a una distancia d del mismo. Al mismo tiempo, se aplica un campo magnético para lograr que la velocidad de la partícula permanezca constante en el tiempo.

a) ¿Qué dirección y magnitud debe tener ese campo magnético? ¿Cómo depende de d?

b) Dejando fijo el campo magnético calculado anteriormente, describa cualitativamente qué sucede si se modifica el módulo o la dirección de la velocidad de la partícula.

Problema 11 Hallar la función real $y(x)$ que es solución de:

$$y'(x) = (y''(x))^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Problema 12 Una fuente de sonido emite en el aire ondas planas de frecuencia 440 Hz que impactan frontalmente contra una pared impermeable al sonido salvo por dos rendijas paralelas de ancho $a = 1$ mm separadas una distancia de $d = 1$ m. La velocidad del sonido en el aire es $c \approx 330$ m/s.

a) Calcular las direcciones hacia donde el sonido transmitido tendrá máxima amplitud. Notar que las rendijas son muy angostas comparado con la longitud de onda del sonido.

b) Recalcular los ángulos del inciso anterior para el caso en que la fuente se desplaza en la dirección del sonido pero en sentido contrario, alejándose de la pared a una velocidad $c/4$.