Instituto
Balseiro

Ingreso 2025

21 de marzo de 2025
Problemas de la mañana
9:00 – 12:00

Instituto Balseiro - Ingreso 2025

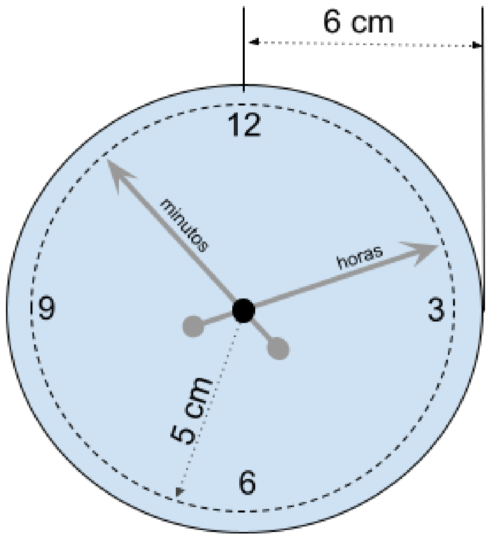
INSTRUCCIONES

Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, los enunciados de **5** problemas.

- Revisar todas las páginas entregadas, y verificar que estén todas bien impresas.
- Responder cada problema en hojas separadas en forma clara y concisa, y usar la cantidad de hojas que necesite.
- Encabezar adecuadamente *todas* las hojas de respuestas. Por ejemplo, si usted se llama Carlos García, la hoja 2 del total de 3 hojas usadas para resolver el problema 4, deberá encabezarse así, en mayúsculas y claramente: **CARLOS GARCÍA, P4 H2/3.**
- Esta parte del examen dura **3** horas, dando aproximadamente un promedio de **36** minutos por problema. Aconsejamos no demorarse demasiado en problemas que le resulten difíciles.
- Antes de entregar, ordenar y verificar que estén las hojas de todos los problemas y controlar el encabezado de cada una.

¡ÉXITO!

Problema 1 Un reloj de agujas flota ingrávido y estático visto por el astronauta Beto, quien permanece quieto en la estación espacial, la cual orbita la Tierra. El reloj consiste en un disco plano homogéneo de radio $R = 6$ cm y masa $M = 240$ g, más sus dos agujas que son varillas unidimensionales idénticas de largo $l = 6$ cm y masa total $m = 12$ g cada una. La masa m de cada aguja está totalmente concentrada en sus dos extremos, de forma tal que el centro de masa de cada aguja pasa por el eje de rotación de las mismas en el centro del reloj. Las agujas están inicialmente detenidas marcando las 12:00.



a) A $t = 0$ el reloj empieza a funcionar y sus agujas empiezan a rotar continuamente con sus respectivas velocidades angulares. Describir el movimiento del disco y de las agujas para $t > 0$ cuantitativamente, según lo ve Beto.

b) A $t = t_1$ se agota la pila que hacía funcionar el reloj, las agujas se detienen y quedan quietas respecto del disco. Describir el movimiento del disco y de las dos agujas para $t > t_1$ cuantitativamente, visto por Beto.

Problema 2 Considerar las funciones $S, C\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$S(t) = \begin{cases} 4t & \text{si } t \in [0,1/4), \\ 2-4t & \text{si } t \in [1/4,3/4), \\ 4t-4 & \text{si } t \in [3/4,1], \end{cases} \quad \text{y} \quad C(t) = \begin{cases} 1-4t & \text{si } t \in [0,1/2), \\ 4t-3 & \text{si } t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

a) Graficar S y C. Mostrar que $|S(t)| + |C(t)| = 1$ para todo $t \in [0,1]$.

b) Sea $T\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(r,t) = (rC(t), rS(t))$. Dibujar la imagen de T, o sea,

$$Im(T) = \{(rC(t), rS(t)) :\ 0 \le r \le 1;\ 0 \le t \le 1\}.$$

c) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = e^{|x|+|y|}|xy|$. Hallar el mínimo y el máximo absolutos de f restringida a $Im(T)$. Hallar todos los puntos en los cuales se alcanzan dichos extremos.

d) Considerar $\tilde{S}, \tilde{C}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las extensiones 1-periódicas de S y C, respectivamente, a todo $\mathbb{R}$. Es decir,

$$\tilde{S}(t) = S(t - \lfloor t \rfloor) \quad \text{y} \quad \tilde{C}(t) = C(t - \lfloor t \rfloor),$$

donde $\lfloor t \rfloor$ es la parte entera de t (el mayor número entero menor o igual a t).

I) Graficar $\tilde{S}(t)$ y $\tilde{C}(t)$, para $t \in [-1, 2]$.

II) Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \tilde{S}(nt) + \frac{e^n - 1}{e^{2n}} \tilde{C}(nt) \right).$$

es convergente para todo $t \in \mathbb{R}$.

Problema 3 Un buzo sumergido en un lago desciende desde un punto A a 10 m de profundidad hasta un punto B a 20 m de profundidad. Lleva atada a su cintura una botella cerrada cuyo volumen es de 1 litro cuando la misma está en el punto inicial A, a 10 m de profundidad. La botella, cuyas paredes son de masa y volumen despreciables, posee en su interior un gas monoatómico. Calcular el trabajo que debe realizar el buzo para arrastrar la botella cuasiestáticamente desde A hasta B.

Despreciar el rozamiento de la botella con el agua, y el peso de la botella con el gas respecto a cualquier otra fuerza a la que se encuentre sometida. Suponer que el gas se comporta como gas ideal y que el agua es incompresible y está a una temperatura de 10 °C en todo el trayecto.

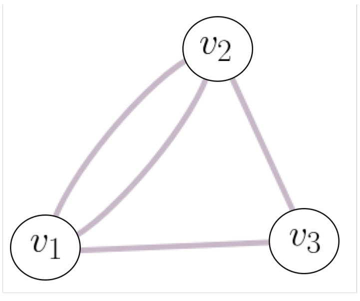
Calcular el trabajo de llevar la botella de A a B suponiendo que las paredes de la botella:

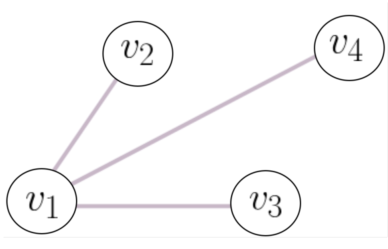
a) Son rígidas.

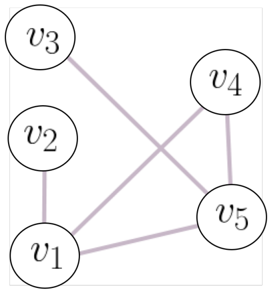
b) Son muy blandas y no soportan ninguna diferencia de presión (de modo que el volumen encerrado cambia en respuesta a cualquier diferencia de presión), y estas paredes son buenas conductoras térmicas.

c) Son muy blandas (como en el caso anterior) pero son aisladoras térmicas.

Problema 4 Un *grafo* G es un conjunto de vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y enlaces que unen ciertos pares de vértices. Por ejemplo:



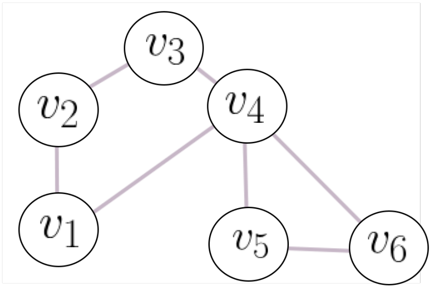




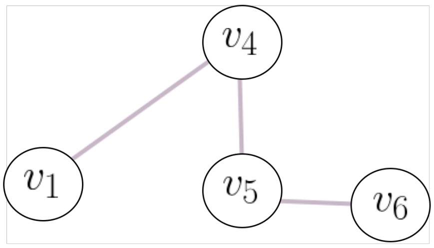
La *matriz de adyacencia* de un grafo G con vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es la matriz cuadrada $A^G = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que a_{ij} = cantidad de enlaces que unen v_i con v_j. En los grafos de la figura de arriba, las matrices de adyacencia son:

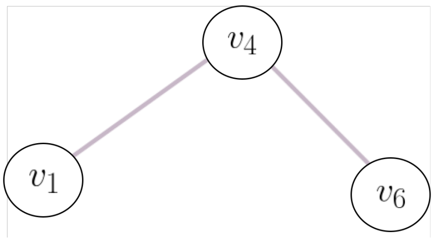
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar la matriz de adyacencia del siguiente grafo.



b) Un *camino* entre dos vértices v_i y v_j es la unión de ciertos enlaces del grafo, que nos permiten hacer un recorrido desde v_i hasta v_j (pasando, eventualmente, por algunos vértices intermedios). En el grafo G del ítem (a), por ejemplo, los siguientes caminos unen v_1 con v_6 (aunque no son los únicos que lo hacen).





Dado un grafo G con vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$, considerar la matriz:

$$(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} := A^G \cdot A^G$$

I) Probar que si $b_{lk} > 0$ entonces hay un *camino* que une v_l con v_k.

II) Si hay un camino que une v_l con v_k, ¿entonces $b_{lk} > 0$? Justificar.

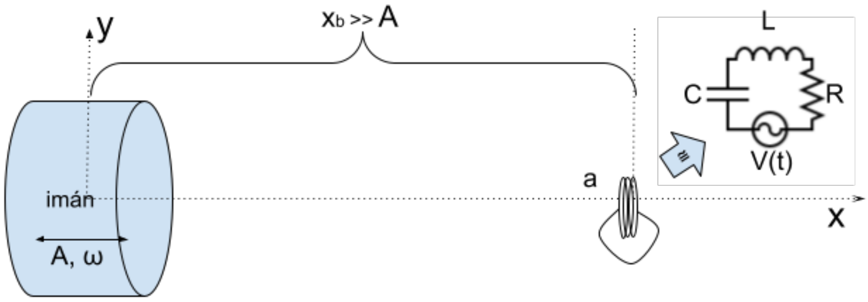
c) Hallar un grafo de tres vértices de forma tal que su matriz de adyacencia **no** tenga como autovalor a $\lambda = 0$.

Problema 5 Un imán realiza oscilaciones sinusoidales forzadas en la dirección $\hat{x}$ con una frecuencia de oscilación ω y con amplitud A alrededor del origen. La magnetización del imán es $\vec{M} = M\hat{x}$ y produce sobre y cerca del eje $\hat{x}$ un campo magnético:

$$\vec{B}(x) \approx \frac{\mu_0 M/2\pi}{(x - x_M)^3}\hat{x}$$

donde $x_M = x_M(t)$ es la posición instantánea del centro de masa del imán respecto del origen.

Como se indica en la figura, a una distancia $x_b \gg A$ del origen y sobre el eje $\hat{x}$, se coloca una bobina de área a y n vueltas muy juntas con normal paralela al eje $\hat{x}$, y cuyos extremos están unidos. El campo magnético sobre la pequeña bobina puede considerarse uniforme y perpendicular al plano de las espiras. Se supone que la bobina real puede modelarse como un circuito ideal RLC en serie, y que el voltaje $V(t)$ inducido en la bobina por el campo magnético del imán es equivalente a una fuente de tensión alterna de voltaje $V(t)$ en el circuito.



a) Mostrar que la condición $x_b \gg A$ implica que el campo magnético uniforme sobre la bobina es aproximadamente (a primer orden en x_M) sinusoidal en el tiempo. Usar esta aproximación para los siguientes cálculos.

b) Calcular $V(t)$, para todo t.

c) ¿Qué condición, en términos de ω y de los parámetros del circuito equivalente, se tiene que dar para que el circuito RLC entre en resonancia con la perturbación oscilatoria del imán?

d) Calcular la potencia instantánea disipada en la bobina.