Instituto
Balseiro

Ingreso 2023

17 de marzo de 2023
Problemas de la mañana
9:00 – 12:30

Instituto Balseiro - Ingreso 2023
Instrucciones

Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, los enunciados de 8 problemas.

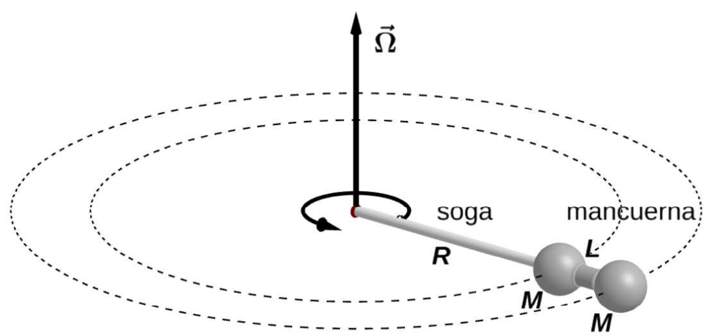
- Revise las páginas y verifique que estén todas bien impresas.
- Escriba su nombre en las hojas de respuestas y firme al pie.
- Responda cada uno de los problemas comenzando en su correspondiente hoja. Si fuera necesario más espacio continúe en hojas adicionales. Responda en forma clara y concisa.
- Tiene Usted a su disposición **3 horas y media** para terminar esta parte del examen. Esto representa en promedio unos 26 minutos para cada problema. Trate de no demorarse demasiado en problemas que le resulten difíciles.
- Antes de entregar, ordene y numere todas las hojas del examen, indicando en la primera página el total de hojas que entregará.
- Al final del cuadernillo de problemas de la tarde, encontrará una hoja con todos los enunciados de la prueba, que puede retirar y llevarse cuando termine.

¡ÉXITO!

Problema 1

Una mancuerna es revoleada con una soga de largo R, y describe una trayectoria circular a una velocidad angular $\vec{\Omega}$ constante (ver figura). La mancuerna consiste en dos pesas de masa M unidas por una barra rígida de largo L. La soga está atada a una de las masas. La masa de la barra se puede despreciar, así como la de la soga, y podemos considerar a las dos pesas como puntuales. No hay gravedad ni rozamiento. La soga se mantiene tensa en todo momento. El mango de la mancuerna y la soga se mantienen colineales en todo momento.

En un instante dado se corta la soga. Escriba las ecuaciones que describen el movimiento subsecuente de la mancuerna y dibuje esquemáticamente la trayectoria de las masas.



Problema 2

$\mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\}$ representa todos los puntos del plano en los cuales el producto xy no se anula. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$.

1. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos según sean máximos, mínimos o puntos de ensilladura.

2. Halle el máximo y el mínimo absolutos de f restringida al dominio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1/2 \leq x \leq 5,\ 1/2 \leq y \leq 5\}$.

Problema 3

1. Determine el campo eléctrico sobre el eje de simetría de un anillo de radio R y densidad lineal de carga uniforme λ.

2. Haga un gráfico cualitativo de la función obtenida, para puntos situados sobre el eje y hasta 3R del centro del anillo. Indique claramente el sistema de coordenadas utilizado para describir el problema.

3. Determine el campo eléctrico sobre el eje de simetría de un disco plano de radio R y densidad superficial de carga σ.

4. Considere ahora que el disco plano es envuelto por un conductor esférico con carga total Q, espesor despreciable y radio 2R, cuyo centro coincide con el centro del disco. Indique cuál es el valor del campo eléctrico sobre el eje de simetría del disco a una distancia 3R del centro del mismo.

Problema 4

Considere la curva descripta implícitamente por los puntos (x, y) que cumplen la siguiente ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbb{M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+k & -1 \\ -1 & 1+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

con $k > 0$.

1. Se realiza un cambio de coordenadas $v = (x+y)/\sqrt{2}$, $w = (x-y)/\sqrt{2}$. Muestre que la ecuación implícita de la curva en estas nuevas coordenadas se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} v & w \end{bmatrix} \mathbb{P} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 1,$$

para una determinada matriz $\mathbb{P}$. Encuentre dicha matriz.

2. ¿A qué figura geométrica corresponde la curva en el nuevo sistema de coordenadas? ¿Cómo se relacionan los parámetros de la ecuación de esta curva con los autovalores de $\mathbb{M}$?

3. Dibuje esquemáticamente la curva en el sistema original (x, y). ¿A qué figura geométrica corresponde?

Problema 5

Un líquido de masa total m_l y calor específico (a presión constante) c_p^l está a temperatura inicial T_0. Lo queremos enfriar sumergiendo un sólido de calor específico c_p^s y masa total m, que inicialmente está a una temperatura $T_1 < T_0$, y que no se disuelve en el líquido.

El procedimiento consiste en dividir el sólido en varios trozos (m_1, m_2, ...) y luego colocar un trozo del sólido en el líquido, dejar al sistema líquido-trozo equilibrar térmicamente, retirar el trozo sumergido, y luego continuar de la misma manera con los trozos restantes. En este proceso vamos a despreciar cualquier intercambio de calor que no sea entre el líquido y el sólido sumergido y a considerar que los trozos los retiramos secos.

1. Ordene las siguientes estrategias de enfriamiento según la temperatura final del líquido, y justifique la respuesta.

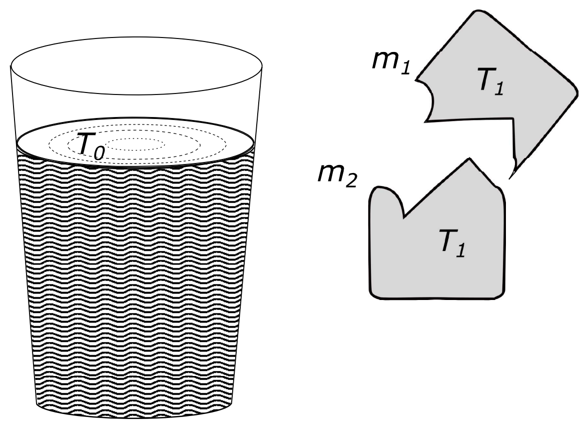
   a) Usar un solo trozo de masa m.

   b) Usar dos trozos, cada uno de masa $m/2$.

   c) Usar dos trozos, primero uno de masa $m/3$ y luego otro de masa $2m/3$.

   d) Usar dos trozos, primero uno de masa $2m/3$ y luego otro de masa $m/3$.

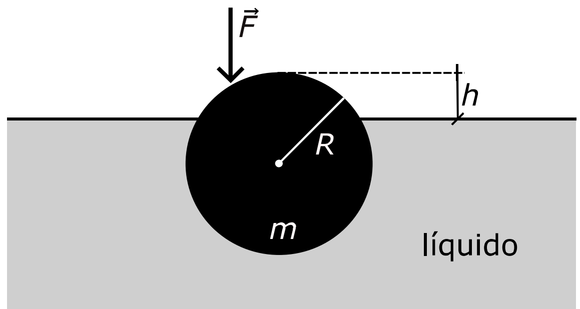
2. ¿Existe otra estrategia de división de la masa m que logre enfriar más el líquido? Discuta cualitativamente.



Problema 6

Una esfera maciza y homogénea de masa m y radio R se encuentra flotando en un líquido de densidad ρ.

1. Si la parte de la esfera que sobresale del agua tiene una altura $h = R/2$, determine la densidad ρ del líquido en función de m y R.
2. Describa cualitativamente qué sucede con la esfera si se le aplica una fuerza impulsiva (de corta duración) como indica la figura (desprecie efectos de rozamiento).



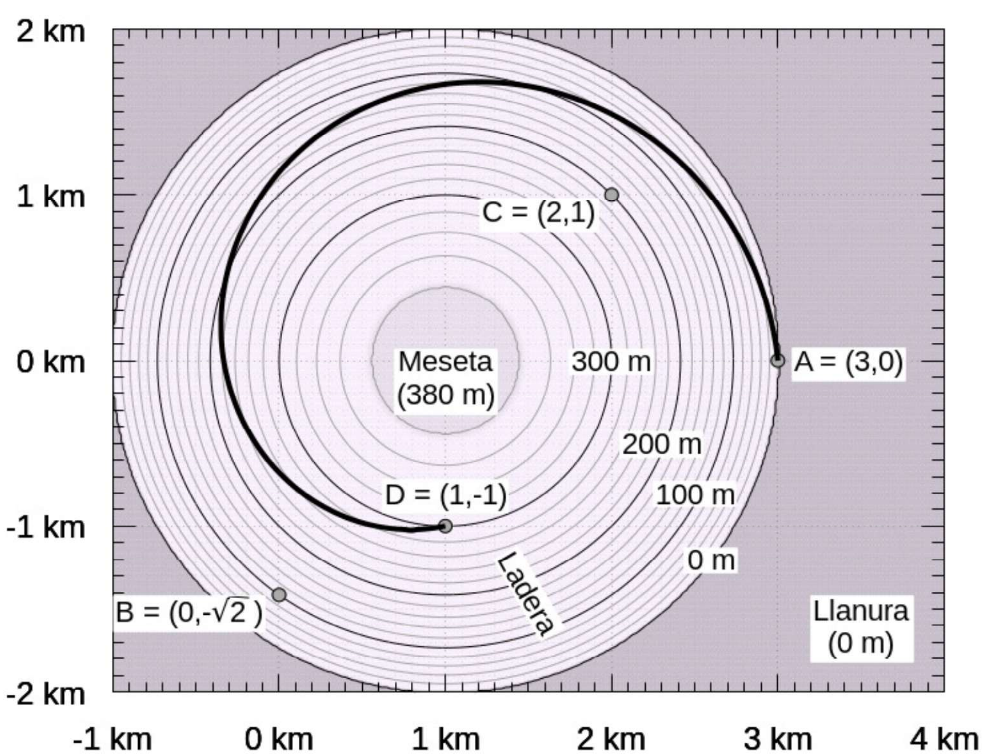
Problema 7

Una persona compra una parcela rectangular, que posee una loma amesetada en su interior. En la figura se muestran diversas curvas de nivel del terreno.

1. A partir del mapa de nivel proporcionado, indique qué superficie de revolución, representada por una ecuación de segundo grado, describe la ladera de la loma.
2. Halle el área total del terreno.
3. Si nos paramos en el punto C y queremos llegar a la meseta recorriendo la menor distancia, ¿cuál es la mayor pendiente a lo largo de ese camino?
4. Se quiere construir un camino en forma de espiral que vaya desde el punto A hasta el punto D. La proyección de este camino en el plano, que puede verse en línea de trazo grueso en el mapa de nivel, está dada por:

$$\gamma(t) = (1,0) + \left(-\frac{2}{3\pi}t + 2\right)(\cos(t)\,,\,\sin(t))$$

Indique cómo calcular la longitud del camino (no es necesario que efectúe el cálculo explícito).



Problema 8

Una vidriera está formada por dos vidrios planos, de espesor uniforme s e índice de refracción $n > 1$, que forman una esquina de ángulo α. Se coloca un cilindro opaco de radio r de forma tal que su eje está ubicado en el plano de simetría de la esquina, a una distancia d del vértice interior de la esquina vidriada. A una distancia D del vértice exterior de la esquina vidriada se encuentra una pantalla, la cual es paralela al eje de simetría del cilindro y perpendicular al plano de simetría de la esquina vidriada. Desprecie efectos de difracción y considere que el aire tiene índice de refracción $n_{aire} = 1$.

1. Compare el ancho de la sombra con el ancho del cilindro en los siguientes casos:
   a) $\alpha = \pi/2$,
   b) $\alpha = \pi$,
   c) $\alpha = 3\pi/2$.
2. Describa cuantitativamente la sombra del cilindro observada en la pantalla, en términos de r, n, s, d y D, para los valores de α dados arriba.