Instituto
Balseiro

Prueba de Admisión

2022

20 de marzo de [redacted]
Problemas de la mañana
9:00 – 12:30

Instituto Balseiro Prueba de Admisión

Instituto Balseiro - 2020
Instrucciones

Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, los enunciados de 8 problemas.

- Revise las páginas y verifique que estén todas bien impresas.
- Escriba su nombre en las hojas de respuestas y firme al pie.
- Responda cada uno de los problemas comenzando en su correspondiente hoja. Si fuera necesario más espacio continúe en hojas adicionales. Responda en forma clara y concisa.
- Tiene Usted a su disposición 3 horas y media para terminar esta parte del examen. Esto representa en promedio unos 25 minutos para cada problema. Trate de no demorarse demasiado en problemas que le resulten difíciles.
- Antes de entregar, ordene y numere todas las hojas del examen, indicando en la primera página el total de hojas que entregará.
- Al final del cuadernillo de problemas de la tarde, encontrará una hoja con todos los enunciados de la prueba, que puede retirar y llevarse cuando termine.

¡ÉXITO!

Instituto Balseiro: Teléfono: (0294) 444-5162 - FAX: (0294) 444-5149
San Carlos de Bariloche - Río Negro

Problema 1

Alicia tiene un globo desinflado cuya masa es 5 g. Lo infla con helio gaseoso a 0 °C hasta que queda suspendido, sin caer ni elevarse. Supondremos que en todo momento la presión interior del globo es igual a la externa.

1. Considerando que la temperatura del helio se mantuvo a 0 °C, hallar el volumen al que infló el globo.
2. A medida que la temperatura del globo se iguala con la del ambiente, ¿qué sucede con el globo? ¿Se mueve? ¿Hacia dónde? Justifique su respuesta.

Datos:

Masa molar del aire, $M_{aire} = 28{,}9$ g/mol
Masa molar del helio, $M_{helio} = 4{,}0$ g/mol
Constante universal de los gases, $R = 8{,}314$ (Pa m^3)/(mol K)
Presión atmosférica, $p_{atm} = 101{,}3$ kPa
Temperatura ambiente, $T_{amb} = 25$ °C.

Problema 2

Sea $x \in \mathbb{R}$.

1. Mostrar que existen infinitos valores de x para los cuales la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(2\pi n x)$$

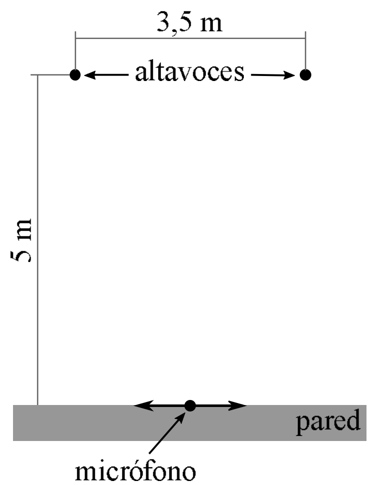
es convergente.

2. Mostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n^2}$$

es convergente para todo x.

Problema 3

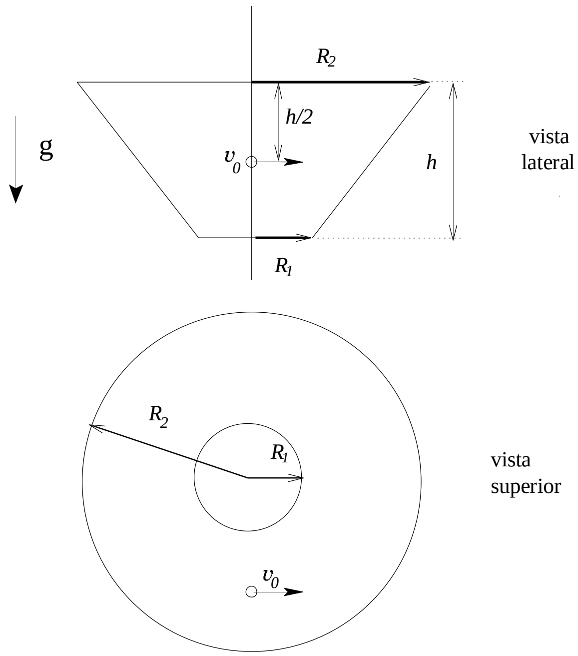


Dos pequeños altavoces están separados una distancia de 3,5 m entre sí, ambos apuntando hacia una pared a 5 m delante de ellos. Los altavoces emiten una onda sonora de la misma intensidad y frecuencia, pero no necesariamente con la misma fase. En estas condiciones, un micrófono colocado en la pared, equidistante de los altavoces, no detecta señal. Al desplazar el micrófono hacia los lados sobre la pared, la señal registrada por el micrófono alcanza un máximo a 0,84 m del punto inicial.

1. ¿Cuál es el desfasaje entre las dos ondas emitidas por los altavoces?
2. ¿Cuál es la frecuencia del sonido emitido por los altavoces?

Nota: todos los elementos están en el plano del dibujo. Suponer que en las condiciones del problema la intensidad de las ondas no depende de la distancia a la fuente y que la velocidad del sonido es 330 m/s.

Problema 4



Una partícula en un campo gravitatorio constante desliza sobre una superficie con forma de cono truncado invertido. A $t = 0$ la partícula se encuentra a mitad de la altura del cono, como indica la figura, y con una velocidad v_0 puramente horizontal. Se desprecian los efectos del rozamiento.

1. En la imagen de la vista superior, indicar cualitativamente posibles trayectorias de la partícula para distintos valores del módulo de la velocidad v_0.

2. Determinar el rango de valores de v_0 para el cual la partícula nunca abandona la superficie.

Problema 5

Indicar en cada uno de los cuatro casos siguientes si la afirmación es verdadera o falsa, justificando la respuesta (en todos los casos I es la matriz identidad).

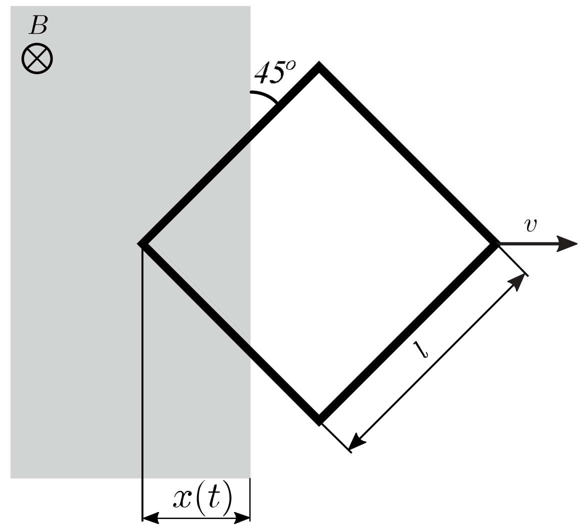
1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ reales tales que $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_k| = 1$. Entonces, $A^2 = I$.

2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ complejos tales que $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_k| = 1$. Entonces, $A^2 = I$.

3. Existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 = I$. Entonces el polinomio característico de A, dado por $p_A(x) = \det(xI - A)$, es alguno de los siguientes: $(x-1)^2$, $(x+1)^2$ o $(x-1)(x+1)$.

Problema 6



Una espira rígida cuadrada de lado l y resistencia eléctrica total R se extrae de una región donde hay un campo magnético $\boldsymbol{B}$ uniforme, normal al plano de la espira (representado por la región gris de la figura). En el instante inicial, la esquina izquierda de la espira está a una distancia $x(t=0) = x_0 < l/\sqrt{2}$ dentro de la región con campo magnético.

1. ¿Qué fuerza se debe aplicar a la espira para que esta se mueva con una velocidad constante v hacia afuera de la región con campo magnético?

2. Demostrar que el trabajo realizado para retirar completamente la espira es igual a la energía disipada por efecto Joule.

Problema 7

La transmisión de información en una red social formada por individuos interactuantes puede modelarse aproximadamente mediante una ecuación diferencial. Se define x como la fracción de individuos que conocen cierta información. El modelo propone que la variación temporal de x es proporcional tanto a la fracción de individuos que conocen dicha información como a la fracción de individuos que aún no la conocen, por lo tanto:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(1 - x),$$

siendo α un coeficiente relacionado con el grado de interacción entre los individuos de la red.

1. Integrar la ecuación para hallar la forma general de $x(t)$.

2. La solución $x(t)$ del punto anterior puede escribirse de la forma

$$x(t) = \frac{A}{1 + Be^{-\gamma t}}$$

Si se sabe que $x(t = 0) = x_0$, ¿cuánto valen A, B y γ?

Problema 8

En un juego de azar, al comenzar una partida un participante saca aleatoriamente una bola de un conjunto formado por 95 bolas rojas y 5 bolas amarillas. Si la bola extraída es de color amarillo, el participante termina el juego con 0 puntos. Si la bola es roja, el participante obtiene 5 puntos y continúa el juego, implementando un cambio: retira la bola roja e incorpora una bola amarilla. Luego, el participante saca otra bola; si la misma es de color rojo suma 6 puntos y continúa con el juego. Si en cambio es de color amarillo termina con el puntaje acumulado hasta ese momento. La secuencia se repite hasta sacar una bola amarilla, que determina el final de la partida. Cada vez que saca una bola roja suma tantos puntos como bolas amarillas hay en el conjunto en ese momento, y luego vuelve a cambiar una bola roja por una amarilla.

1. Determinar el puntaje máximo obtenible en una partida.
2. Calcular la probabilidad de que un jugador termine el juego con 18 puntos.