Instituto
Balseiro

Ingreso 2024

15 de marzo de 2024
Problemas de la tarde
14:00 – 16:00

Instituto Balseiro - Ingreso 2024

Instrucciones

Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, los enunciados de **12** problemas cortos, para los cuales se esperan respuestas **breves**.

- Revise las páginas y verifique que estén todas bien impresas.
- Escriba su nombre en **todas** las hojas de respuestas que entregue.
- Responda cada uno de los problemas comenzando en su correspondiente hoja. Si fuera necesario más espacio continúe en hojas adicionales. Responda en forma clara y concisa.
- Tiene Usted a su disposición **2 horas** para terminar esta parte del examen. Esto representa en promedio unos **10** minutos para cada problema. Trate de no demorarse demasiado en problemas que le resulten difíciles.
- Antes de entregar, ordene y numere todas las hojas del examen, indicando en la primera página el total de hojas que entregará.
- Al final de este cuadernillo encontrará una recopilación de todos los problemas, que puede retirar y llevarse cuando termine.

¡ÉXITO!

Problema 7

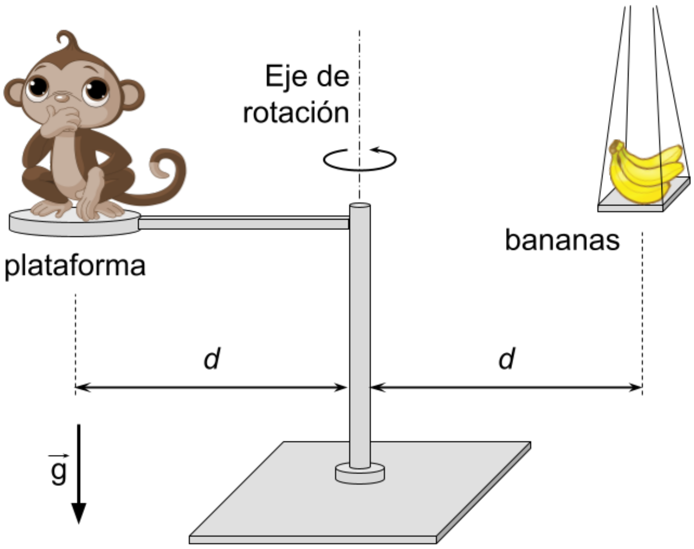
Habitualmente se observa que después de cerrar la puerta del freezer (congelador del refrigerador), abrirla de nuevo inmediatamente cuesta más que si uno lo hace luego de esperar unos minutos.

Explicar este fenómeno.

Problema 8

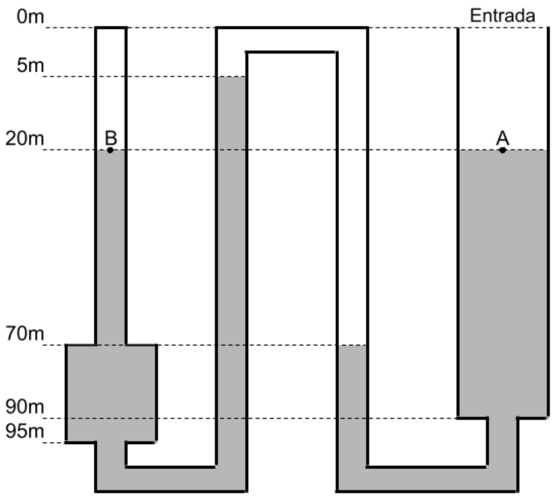
Un monito se encuentra sobre una plataforma, la cual puede girar libremente y sin rozamiento en el plano horizontal, alrededor de un eje vertical. Del lado opuesto a la plataforma hay bananas, que el monito hambriento desea alcanzar. El monito no puede abandonar su plataforma, la cual está inicialmente en reposo.

¿Hay algún movimiento posible del monito sobre la plataforma que le permita alcanzar las bananas? Justificar la respuesta.



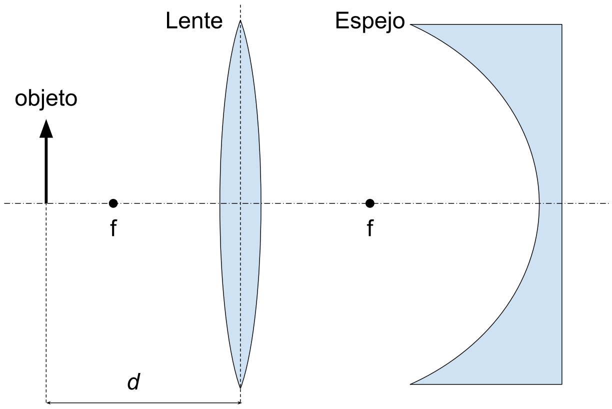
Problema 9

Se exploró un sistema de túneles y cuevas subterráneos que se encuentran parcialmente inundados y que tiene atrapado aire en dos zonas de su interior (llamadas cámaras de aire). El mismo posee una sola entrada, y ninguna salida. Este sistema se puede aproximar como una sucesión de cilindros horizontales y verticales conectados, como se muestra en la figura. Los túneles poseen un diámetro aproximado de 1 m, y las cuevas uno de 10 m. En la figura se muestran además las cotas donde se encontraron los niveles de agua (las interfaces aire/agua), tomando como referencia la cota de la entrada. Estimar la presión en B, sabiendo que A está a 1 atm y que la densidad del agua es de aproximadamente 1000 kg/m^3. Despreciar la densidad del aire y la tensión superficial en todas las interfaces aire/agua.



Problema 10

Un sistema óptico está compuesto de una lente delgada convergente, con distancia focal f, y un espejo parabólico alineado con dicha lente, cuyo foco coincide con el foco del lado derecho de la lente. Determinar gráficamente la imagen de un objeto ubicado a una distancia d de la lente, ubicado a la izquierda que el foco izquierdo de la lente (ver figura). Especificar la ubicación y orientación de la imagen. ¿Es el tamaño de la imagen mayor, menor o igual que el del objeto? ¿Esta respuesta depende de d?



Problema 11

Hallar **todos** los $w \in \mathbb{C}$ tales que $i(w^2 + 9) \in \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z) = 0 \ \text{y} \ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ (aquí $\mathrm{Re}(z)$ y $\mathrm{Im}(z)$ denotan las *partes real* e *imaginaria* de z).

Problema 12

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+1}\right) \frac{\sin(n^2)+\cos(e^n)}{2^n}$ es convergente. Justificar.

Problema 13

Hallar, si existen, los puntos críticos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y + y^2x - x$. Clasificarlos según sean máximos, mínimos o puntos de ensilladura.

Problema 14

Sea $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$xf'(x) + f(x) + x = 0 \quad \text{y} \quad f(1) = 1. \tag{1}$$

a) Mostrar que si $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, entonces

$$xg'(x) + 2g(x) + 1 = 0 \quad \text{y} \quad g(1) = 1.$$

b) Hallar la solución de (1).

Problema 15

Se tiene una máquina realizando un ciclo de Carnot entre las temperaturas T_1 (fuente caliente) y T_2 (fuente fría). Para aumentar la eficiencia del ciclo, ¿conviene aumentar T_1 en una cantidad ΔT o disminuir T_2 en la misma cantidad? Justificar.

Problema 16

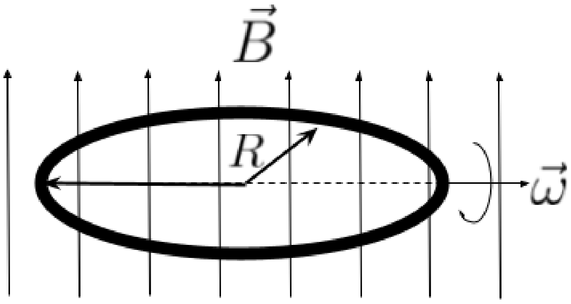
Un remero sobre un bote en reposo es capaz de ejercer una fuerza $F/2$ sobre el extremo de cada uno de los dos remos del bote, cuando los mismos se encuentran perpendiculares a la dirección del movimiento. Cada remo tiene longitud l y su punto de apoyo en el bote está a $l/4$ del extremo donde el remero ejerce la fuerza y a $3/4\ l$ del extremo que se apoya en el agua. Considerar que la masa total del bote y su contenido es m, y que el extremo del remo no se desplaza mientras está sumergido. Despreciar la fuerza de rozamiento del casco del bote con el agua. ¿Con qué aceleración se moverá el bote?

Problema 17

Una espira circular de cobre de radio R gira a una velocidad angular ω constante alrededor de un eje diametral en un campo magnético $\vec{B}$ constante y uniforme, perpendicular al eje de rotación, como se muestra en la figura. El sistema se encuentra en un estado estacionario.

a) Graficar esquemáticamente la corriente en la espira en función del tiempo.

b) ¿Se espera que la espira de cobre esté a una temperatura mayor, menor o igual a la temperatura del ambiente? Justificar.

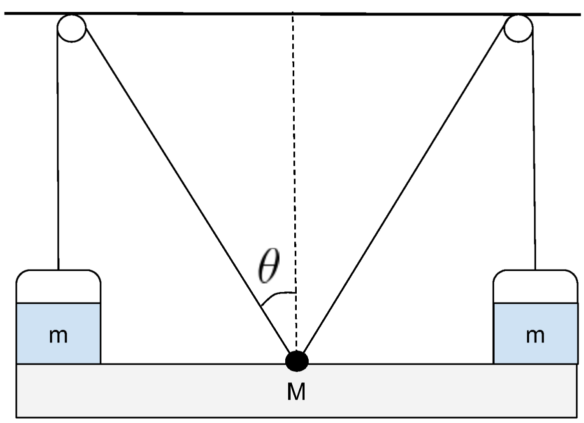


Problema 18

Dos baldes de masa despreciable, ambos inicialmente llenos con la misma cantidad de agua de masa m, y una tabla homogénea de masa M cuelgan de sogas inextensibles. Las sogas pasan por dos poleas fijas al techo y están atadas al punto medio de la tabla. Todo el sistema está inicialmente en equilibrio y los baldes hacen contacto con la tabla, tal como se muestra en la figura.

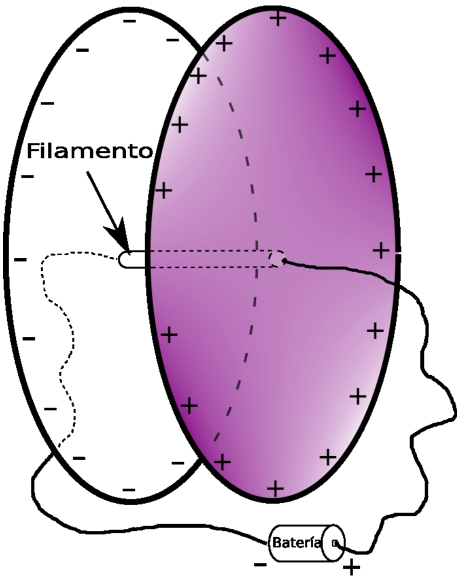
a) Si los baldes pierden agua al mismo ritmo y m disminuye lentamente en el tiempo, ¿para qué masa m dejan de hacer contacto con la tabla?

b) Describir cualitativamente lo que sucede luego que los baldes dejan de hacer contacto con la tabla.



Problema 1 Se tiene un instrumento que consiste en dos discos conductores de radio r, separados por $d = 1$ cm. El sistema posee una capacidad eléctrica de $C = 1$ μF. Estos discos no están completamente aislados entre sí, sino que un filamento de sección transversal $s = 10^{-6}$ cm^2 los conecta justo en el centro, como se muestra en la figura. El filamento posee una resistividad eléctrica de $\rho = 3 \cdot 10^{-8}$ Ωm. Se aplica una tensión eléctrica entre ambos discos, de manera tal que éstos se cargan eléctricamente, y se atraen.

Calcular la corriente que circula por el filamento cuando el mismo soporta una tensión de compresión de 100 Pa. Para calcular el campo eléctrico entre los discos puede suponer que éstos se comportan como planos infinitos con densidad de carga uniforme. Se supone que la longitud del filamento permanece constante.



Problema 2 Despreciando efectos de rozamiento, calcular el período de oscilación T de una partícula de masa m en un potencial

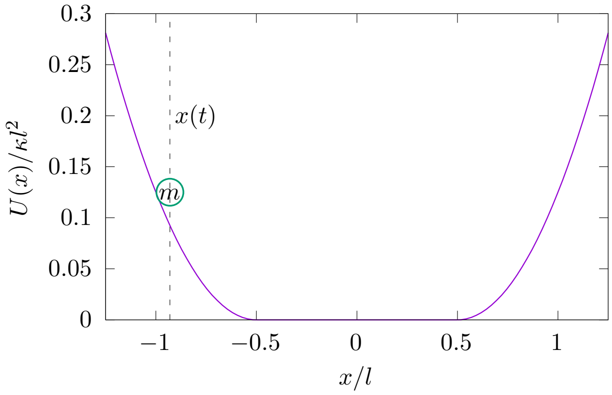
$$U(x) = \begin{cases} \frac{\kappa(|x|-l/2)^2}{2} & |x| > l/2 \\ 0 & |x| \leq l/2 \end{cases}$$

en función de su energía E

a) ¿A qué tiende el resultado cuando $E \gg \kappa l^2$? Interpretar.

b) ¿A qué tiende el resultado cuando $E \ll \kappa l^2$? Interpretar.

c) Si se denomina $x(t)$ a la posición de la partícula a tiempo t, y $p(t)$ a su momento lineal a tiempo t, realizar un gráfico bidimensional de la curva paramétrica $(x(t), p(t))$ para $0 \leq t \leq T$.



Problema 3 Sea un pistón de masa M y espesor despreciable, el cual se puede desplazar libremente en la dirección vertical, dentro de una camisa adiabática, la cual tiene una base de área $A_c = 50$ cm^2 y una altura $L = 1$ m. El pistón divide a la camisa en dos cámaras, una estanca inferior I llena de un gas ideal monoatómico, y una superior S conectada a la atmósfera mediante un tubo de área interna $A_t = 1$ cm^2.

a) Inicialmente, todo el sistema se encuentra en equilibrio con la atmósfera, la cual está a una temperatura $T_0 = 5$°C y una presión $P_0 = 10^5$ Pa. En estas condiciones, la cámara inferior posee una altura $h_0 = L/2$ y una presión $P_{I_0} = 1{,}1 \cdot 10^5$ Pa. Determinar la masa M del pistón.

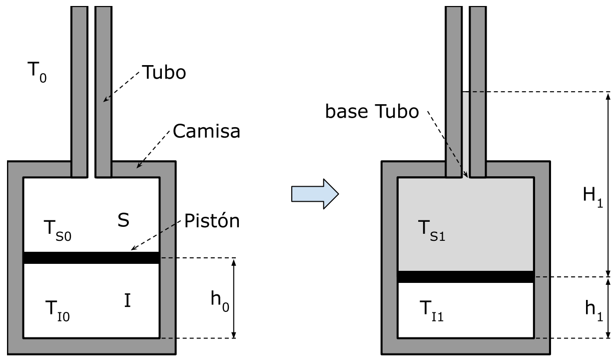
b) Luego, instantáneamente se llena la cámara superior y parte del tubo (hasta una altura H_1 respecto del pistón) con agua caliente a $T_{S_1} = 95$°C, hasta que la presión del gas dentro de la cámara inferior llega a $P_{I_1} = 1{,}2 \cdot 10^5$ Pa. Determinar la masa de agua agregada, suponiendo que no hay intercambio de calor entre ambas cámaras, que la densidad del agua es de $\rho = 1$ kg/dm^3, y la gravedad posee un valor de $g = 9{,}8$ m/s^2. Calcular además la nueva altura h_1 que posee la cámara inferior.

c) Luego del llenado rápido, se cierra una válvula que está en la base del tubo, y que aísla a éste de la cámara superior. Finalmente se espera el tiempo suficiente para que se equilibren las temperaturas del gas en la cámara inferior con la del agua en la cámara superior. Determinar la presión P_{I_2} dentro de la cámara inferior y su nueva temperatura, para cuando se alcance el equilibrio térmico mencionado, suponiendo que no hay intercambio de calor con la atmósfera, despreciando la inercia térmica de las paredes del pistón y la camisa, y despreciando también el coeficiente de dilatación del agua. Considerar que el agua es incompresible y posee un calor específico $C = 4{,}2$ J/(gK).

Problema 4 Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, se define su *radio numérico* como

$$r(A) := \max\left\{ \left| \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| : \; x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

a) Calcular $r\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right)$.



b) Mostrar que si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

entonces $r(D) = \text{máx}\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$.

Problema 5 Se tiene un neumático como el que se ilustra en la figura. El neumático tiene una masa m, de manera tal que, en equilibrio, su peso mg deforma la base y genera una superficie de contacto con el piso de área A_0. En esas condiciones la altura desde el piso al eje de la rueda es h_0, y la presión del aire en el interior de la misma es p_0.

a) Encontrar la relación entre m, A_0, p_0 y h_0, para la condición de equilibrio estático.

A tiempo $t = 0$ se perturba el equilibrio del sistema de manera que h varía con el tiempo:

$$h(t) = h_0 - z(t).$$

Por las características constructivas de la rueda se sabe que ante esta variación de h se cumplen las siguientes relaciones:

$$p(t) = p_0 + k_p\ z(t) \quad \text{y} \quad A(t) = A_0 + k_A\ z(t),$$

donde k_A y k_p son constantes y no negativas.

b) Escribir la ecuación de movimiento del sistema perturbado.

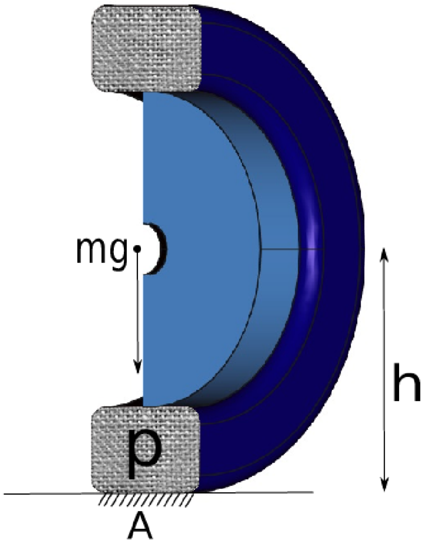
c) Escribir las condiciones para que el sistema se comporte como un oscilador armónico.

Despreciar la rigidez del neumático.

Problema 6 Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz con autovalores $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$ y autovectores

$$v_1 = R_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = R_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.



a) Hallar la matriz A.

b) Sean $C_{\mathcal{BE}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ a $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$ y $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = A \cdot C_{\mathcal{BE}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Graficar el conjunto

$$P = \{T(x,y) : \ (x,y) \in [0,1] \times [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

donde $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x, y \leq 1\}$.

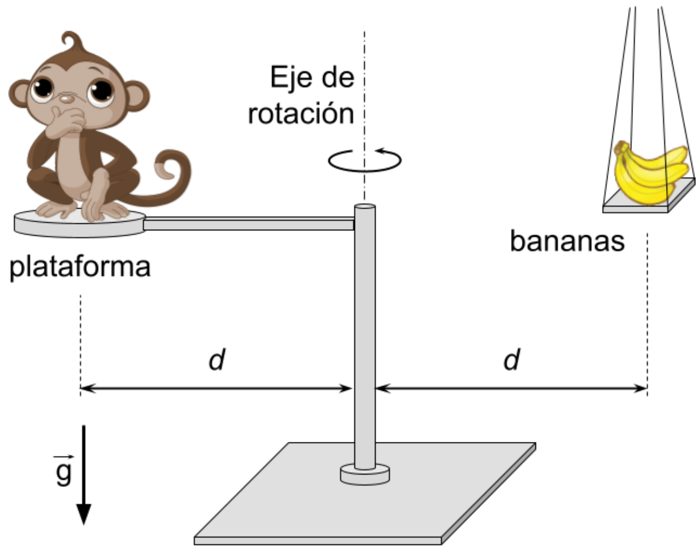
Problema 7 Habitualmente se observa que después de cerrar la puerta del freezer (congelador del refrigerador), abrirla de nuevo inmediatamente cuesta más que si uno lo hace luego de esperar unos minutos.

Explicar este fenómeno.

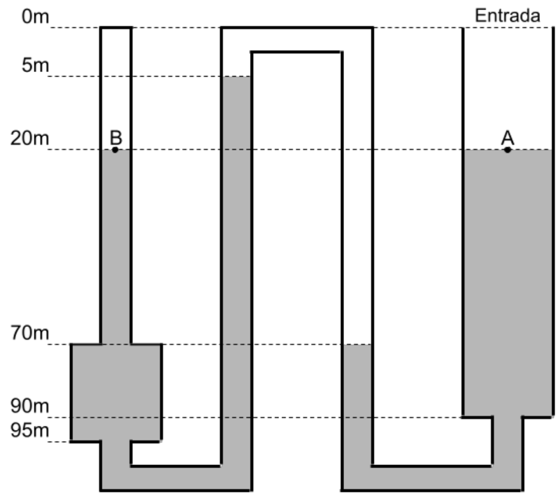
Problema 8 Un monito se encuentra sobre una plataforma, la cual puede girar libremente y sin rozamiento en el plano horizontal, alrededor de un eje vertical. Del lado opuesto a la plataforma hay bananas, que el monito hambriento desea alcanzar. El monito no puede abandonar su plataforma, la cual está inicialmente en reposo.

¿Hay algún movimiento posible del monito sobre la plataforma que le permita alcanzar las bananas? Justificar la respuesta.

Problema 9 Se exploró un sistema de túneles y cuevas subterráneos que se encuentran parcialmente inundados y que tiene atrapado aire en dos zonas de su interior (llamadas cámaras de aire). El mismo posee una sola entrada, y ninguna salida. Este sistema se puede aproximar como una sucesión de cilindros horizontales y verticales conectados, como se muestra en la figura. Los túneles poseen un diámetro aproximado de 1 m, y las cuevas uno de 10 m. En la figura se muestran además las cotas donde se encontraron los niveles de agua (las interfaces aire/agua), tomando como referencia la cota de la

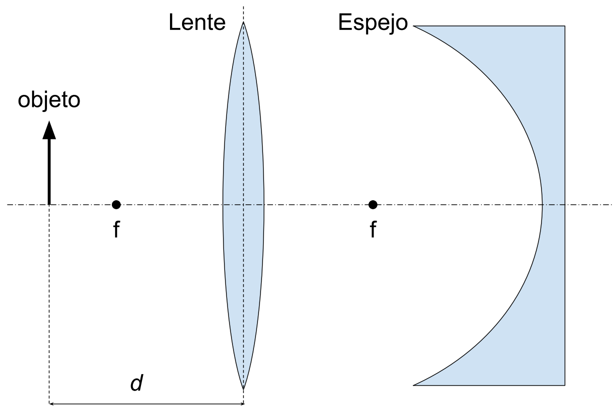


entrada. Estimar la presión en B, sabiendo que A está a 1 atm y que la densidad del agua es de aproximadamente 1000 kg/m^3. Despreciar la densidad del aire y la tensión superficial en todas las interfaces aire/agua.



Problema 10 Un sistema óptico está compuesto de una lente delgada convergente, con distancia focal f, y un espejo parabólico alineado con dicha lente, cuyo foco coincide con el foco del lado derecho de la lente. Determinar gráficamente la imagen de un objeto ubicado a una distancia d de la lente, ubicado a la izquierda que el foco izquierdo de la lente (ver figura). Especificar la ubicación y orientación de la imagen. ¿Es el tamaño de la imagen mayor, menor o igual que el del objeto? ¿Esta respuesta depende de d?

Problema 11 Hallar **todos** los $w \in \mathbb{C}$ tales que $i(w^2+9) \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ y } \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ (aquí $\operatorname{Re}(z)$ y $\operatorname{Im}(z)$ denotan las *partes real* e *imaginaria* de z).



Problema 12 Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+1}\right) \frac{\sin(n^2)+\cos(e^n)}{2^n}$ es convergente. Justificar.

Problema 13 Hallar, si existen, los puntos críticos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y + y^2x - x$. Clasificarlos según sean máximos, mínimos o puntos de ensilladura.

Problema 14 Sea $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$xf'(x) + f(x) + x = 0 \quad \text{y} \quad f(1) = 1. \tag{2}$$

a) Mostrar que si $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, entonces

$$xg'(x) + 2g(x) + 1 = 0 \quad \text{y} \quad g(1) = 1.$$

b) Hallar la solución de (1).

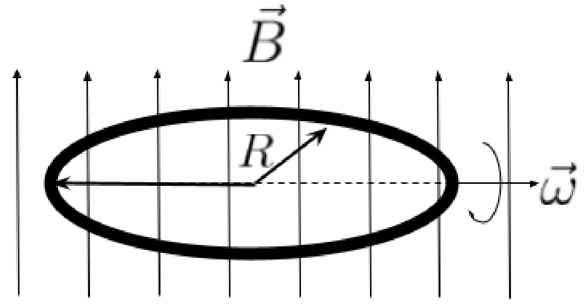
Problema 15 Se tiene una máquina realizando un ciclo de Carnot entre las temperaturas T_1 (fuente caliente) y T_2 (fuente fría). Para aumentar la eficiencia del ciclo, ¿conviene aumentar T_1 en una cantidad ΔT o disminuir T_2 en la misma cantidad? Justificar.

Problema 16 Un remero sobre un bote en reposo es capaz de ejercer una fuerza $F/2$ sobre el extremo de cada uno de los dos remos del bote, cuando los mismos se encuentran perpendiculares a la dirección del movimiento. Cada remo tiene longitud l y su punto de apoyo en el bote está a $l/4$ del extremo donde el remero ejerce la fuerza y a $3/4\ l$ del extremo que se apoya en el agua. Considerar que la masa total del bote y su contenido es m, y que el extremo del remo no se desplaza mientras está sumergido. Despreciar la fuerza de rozamiento del casco del bote con el agua. ¿Con qué aceleración se moverá el bote?

Problema 17 Una espira circular de cobre de radio R gira a una velocidad angular ω constante alrededor de un eje diametral en un campo magnético $\vec{B}$ constante y uniforme, perpendicular al eje de rotación, como se muestra en la figura. El sistema se encuentra en un estado estacionario.

a) Graficar esquemáticamente la corriente en la espira en función del tiempo.

b) ¿Se espera que la espira de cobre esté a una temperatura mayor, menor o igual a la temperatura del ambiente? Justificar.



Problema 18 Dos baldes de masa despreciable, ambos inicialmente llenos con la misma cantidad de agua de masa m, y una tabla homogénea de masa M cuelgan de sogas inextensibles. Las sogas pasan por dos poleas fijas al techo y están atadas al punto medio de la tabla. Todo el sistema está inicialmente en equilibrio y los baldes hacen contacto con la tabla, tal como se muestra en la figura.

a) Si los baldes pierden agua al mismo ritmo y m disminuye lentamente en el tiempo, ¿para qué masa m dejan de hacer contacto con la tabla?

b) Describir cualitativamente lo que sucede luego que los baldes dejan de hacer contacto con la tabla.