Instituto
Balseiro

Ingreso 2024

15 de marzo de 2024
Problemas de la mañana
9:00 – 12:00

Instituto Balseiro - Ingreso 2024
Instrucciones

Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, los enunciados de **6** problemas de desarrollo.

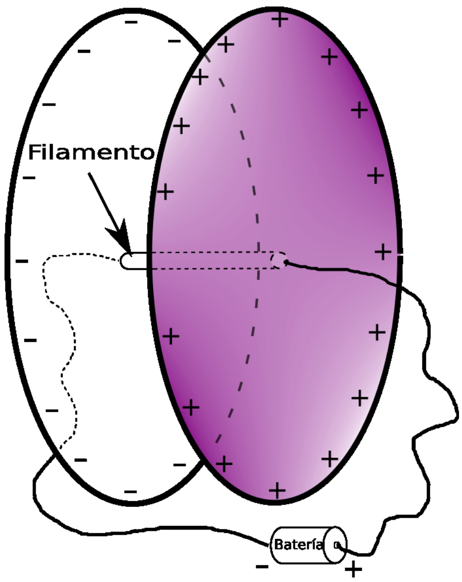
- Revise las páginas y verifique que estén todas bien impresas.
- Escriba su nombre en **todas** las hojas de respuestas que entregue.
- Responda cada uno de los problemas comenzando en su correspondiente hoja de enunciado. Si fuera necesario más espacio continúe en hojas adicionales. Responda en forma clara y concisa.
- Tiene Usted a su disposición **3 horas** para terminar esta parte del examen. Esto representa en promedio unos **30** minutos para cada problema. Trate de no demorarse demasiado en problemas que le resulten difíciles.
- Antes de entregar, ordene y numere todas las hojas del examen, indicando en la primera página el total de hojas que entregará.
- Al final del cuadernillo de problemas de la tarde, encontrará una hoja con todos los enunciados de la prueba, que puede retirar y llevarse cuando termine.

¡ÉXITO!

Problema 1

Se tiene un instrumento que consiste en dos discos conductores de radio r, separados por $d = 1$ cm. El sistema posee una capacidad eléctrica de $C = 1\ \mu$F. Estos discos no están completamente aislados entre sí, sino que un filamento de sección transversal $s = 10^{-6}$ cm^2 los conecta justo en el centro, como se muestra en la figura. El filamento posee una resistividad eléctrica de $\rho = 3 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m. Se aplica una tensión eléctrica entre ambos discos, de manera tal que éstos se cargan eléctricamente, y se atraen.

Calcular la corriente que circula por el filamento cuando el mismo soporta una tensión de compresión de 100 Pa. Para calcular el campo eléctrico entre los discos puede suponer que éstos se comportan como planos infinitos con densidad de carga uniforme. Se supone que la longitud del filamento permanece constante.



Problema 2

Despreciando efectos de rozamiento, calcular el período de oscilación T de una partícula de masa m en un potencial

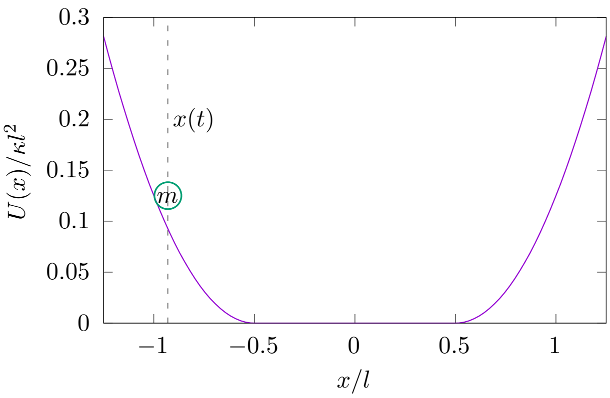
$$U(x) = \begin{cases} \frac{\kappa(|x|-l/2)^2}{2} & |x| > l/2 \\ 0 & |x| \leq l/2 \end{cases}$$

en función de su energía E

a) ¿A qué tiende el resultado cuando $E \gg \kappa l^2$? Interpretar.

b) ¿A qué tiende el resultado cuando $E \ll \kappa l^2$? Interpretar.

c) Si se denomina $x(t)$ a la posición de la partícula a tiempo t, y $p(t)$ a su momento lineal a tiempo t, realizar un gráfico bidimensional de la curva paramétrica $(x(t), p(t))$ para $0 \leq t \leq T$.



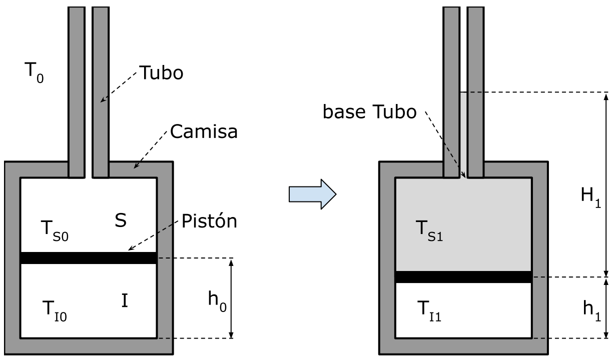
Problema 3

Sea un pistón de masa M y espesor despreciable, el cual se puede desplazar libremente en la dirección vertical, dentro de una camisa adiabática, la cual tiene una base de área $A_c = 50$ cm^2 y una altura $L = 1$ m. El pistón divide a la camisa en dos cámaras, una estanca inferior I llena de un gas ideal monoatómico, y una superior S conectada a la atmósfera mediante un tubo de área interna $A_t = 1$ cm^2.

a) Inicialmente, todo el sistema se encuentra en equilibrio con la atmósfera, la cual está a una temperatura $T_0 = 5°$C y una presión $P_0 = 10^5$ Pa. En estas condiciones, la cámara inferior posee una altura $h_0 = L/2$ y una presión $P_{I_0} = 1{,}1 \cdot 10^5$ Pa. Determinar la masa M del pistón.

b) Luego, instantáneamente se llena la cámara superior y parte del tubo (hasta una altura H_1 respecto del pistón) con agua caliente a $T_{S_1} = 95°$C, hasta que la presión del gas dentro de la cámara inferior llega a $P_{I_1} = 1{,}2 \cdot 10^5$ Pa. Determinar la masa de agua agregada, suponiendo que no hay intercambio de calor entre ambas cámaras, que la densidad del agua es de $\rho = 1$ kg/dm^3, y la gravedad posee un valor de $g = 9{,}8$ m/s^2. Calcular además la nueva altura h_1 que posee la cámara inferior.

c) Luego del llenado rápido, se cierra una válvula que está en la base del tubo, y que aísla a éste de la cámara superior. Finalmente se espera el tiempo suficiente para que se equilibren las temperaturas del gas en la cámara inferior con la del agua en la cámara superior. Determinar la presión P_{I_2} dentro de la cámara inferior y su nueva temperatura, para cuando se alcance el equilibrio térmico mencionado, suponiendo que no hay intercambio de calor con la atmósfera, despreciando la inercia térmica de las paredes del pistón y la camisa, y despreciando también el coeficiente de dilatación del agua. Considerar que el agua es incompresible y posee un calor específico $C = 4{,}2$ J/(gK).



Problema 4

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, se define su *radio numérico* como

$$r(A) := \text{máx}\left\{ \left| (x \quad y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| : \; x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

a) Calcular $r\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

b) Mostrar que si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

entonces $r(D) = \text{máx}\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$.

Problema 5

Se tiene un neumático como el que se ilustra en la figura. El neumático tiene una masa m, de manera tal que, en equilibrio, su peso mg deforma la base y genera una superficie de contacto con el piso de área A_0. En esas condiciones la altura desde el piso al eje de la rueda es h_0, y la presión del aire en el interior de la misma es p_0.

a) Encontrar la relación entre m, A_0, p_0 y h_0, para la condición de equilibrio estático.

A tiempo $t = 0$ se perturba el equilibrio del sistema de manera que h varía con el tiempo:

$$h(t) = h_0 - z(t).$$

Por las características constructivas de la rueda se sabe que ante esta variación de h se cumplen las siguientes relaciones:

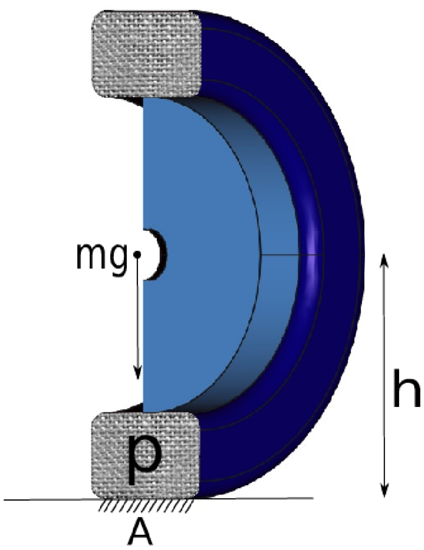
$$p(t) = p_0 + k_p\ z(t) \quad \text{y} \quad A(t) = A_0 + k_A\ z(t),$$

donde k_A y k_p son constantes y no negativas.

b) Escribir la ecuación de movimiento del sistema perturbado.

c) Escribir las condiciones para que el sistema se comporte como un oscilador armónico.

Despreciar la rigidez del neumático.



Problema 6

Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz con autovalores $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$ y autovectores

$$v_1 = R_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = R_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Hallar la matriz A.

b) Sean $C_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ a $\mathcal{E} = \{(1,0), (0,1)\}$ y $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = A \cdot C_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Graficar el conjunto

$$P = \{T(x,y) : \ (x,y) \in [0,1] \times [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

donde $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x, y \leq 1\}$.