Instituto
Balseiro

Ingreso 2023

17 de marzo de 2023
Problemas de la tarde
14:00 – 16:30

Instituto Balseiro - Ingreso 2023

Instrucciones

Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, los enunciados de 6 problemas.

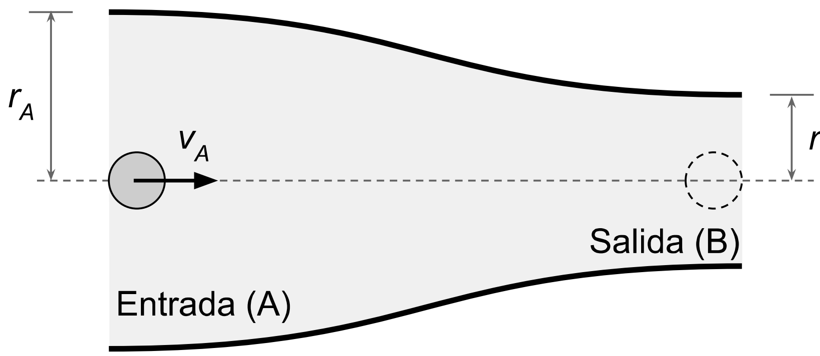
- Revise las páginas y verifique que estén todas bien impresas.
- Escriba su nombre en las hojas de respuestas y firme al pie.
- Responda cada uno de los problemas comenzando en su correspondiente hoja. Si fuera necesario más espacio continúe en hojas adicionales. Responda en forma clara y concisa.
- Tiene Usted a su disposición **2 horas y media** para terminar esta parte del examen. Esto representa en promedio unos 25 minutos para cada problema. Trate de no demorarse demasiado en problemas que le resulten difíciles.
- Antes de entregar, ordene y numere todas las hojas del examen, indicando en la primera página el total de hojas que entregará.
- Al final de este cuadernillo encontrará una recopilación de todos los problemas, que puede retirar y llevarse cuando termine.

¡ÉXITO!

Problema 9

Un conducto de sección circular de radio $r_A = 2$ m, que se contrae suavemente hasta $r_B = 1{,}5$ m, lleva agua a una turbina de una central hidroeléctrica. En la entrada (A) del conducto, la presión del agua es $P_A = 3$ atm y su velocidad es $v_A = 3$ m/s, que se puede suponer uniforme en cada sección transversal del conducto.

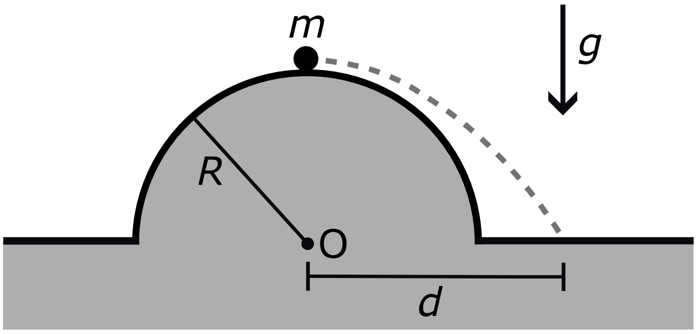
1. Determine la velocidad del agua v_B y la presión P_B a la salida (B) del conducto.
2. Determine el cambio porcentual de volumen de un pequeño globo estanco y lleno de aire que viaja desde A a B a lo largo del eje del conducto. Desprecie la tensión superficial en las paredes del globo. Suponga que el aire no cambia de temperatura y que el globo es tan pequeño que su presencia no altera las condiciones del fluido por el que viaja.
3. Repita el análisis previo, suponiendo que no existe intercambio de calor entre el agua y el aire del globo.



Problema 10

Una partícula de masa m cae desde lo más alto de una cúpula semiesférica de radio R por acción de la gravedad. La velocidad inicial de la partícula es cero y una perturbación infinitesimal inicia su caída. Desprecie las fuerzas de rozamiento.

1. Determine a qué altura la partícula se despega de la cúpula.
2. Determine la distancia d al punto O a la que la partícula impactará con el piso horizontal.



Problema 11

Considere el modelo poblacional dado por

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right),$$

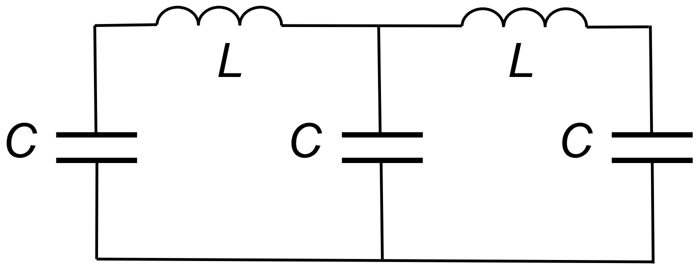
donde $y(t)$ es el tamaño de la población a tiempo $t > 0$ y $r, K > 0$ son constantes asociadas a la tasa de crecimiento de la población y a la capacidad de carga del ambiente, respectivamente.

1. Halle la solución de la ecuación, con dato inicial $y(0) = y_0 > 0$ (puede ser útil el cambio de variables $z(t) = \frac{1}{K} - \frac{1}{y(t)}$).
2. Muestre que si $y_0 \neq K$, entonces $y(t) \neq K$ para todo $t > 0$. Muestre que la solución hallada en (1) tiende a K cuando $t \to +\infty$.
3. Halle los $y_0 > 0$ para los cuales la solución hallada en (1) es estrictamente creciente.

Problema 12

Considere el circuito de la figura, con dos inductancias idénticas de valor L y tres capacitores idénticos con capacitancia C. No hay disipación. Inicialmente todos los capacitores están cargados arbitrariamente y se deja evolucionar el sistema.

Demuestre que tanto la suma como la resta de las cargas en los capacitores laterales realizan oscilaciones armónicas en función del tiempo, pero con distintas frecuencias. Determine estas dos frecuencias en función de los parámetros del circuito.



Problema 13

A partir de los datos brindados por el servicio meteorológico de Ciudad Gótica, se puede observar que:

- Si estamos en un día soleado, las probabilidades de que el próximo día esté soleado, nublado o lluvioso son $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{10}$, respectivamente.
- Si estamos en un día nublado, las probabilidades de que el próximo día esté soleado, nublado o lluvioso son $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{3}{10}$, respectivamente.
- Si estamos en un día lluvioso, las probabilidades de que el próximo día esté soleado, nublado o lluvioso son $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{10}$, respectivamente.

Digamos que hoy es el día $n = 0$ y que:

$$x_n(S) = \text{probabilidad de que el día } n \text{ esté soleado;}$$

$$x_n(N) = \text{probabilidad de que el día } n \text{ esté nublado;}$$

$$x_n(L) = \text{probabilidad de que el día } n \text{ esté lluvioso}$$

y consideremos el *vector estado de probabilidades* $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n(S) \\ x_n(N) \\ x_n(L) \end{pmatrix}$.

Los vectores iniciales $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nos indican que hoy está soleado, nublado o lluvioso, respectivamente.

1. Sabiendo que hoy está nublado, halle la probabilidad de que pasado mañana esté soleado.
2. Halle la *matriz de transición* $\mathbb{P}$ que verifica $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbb{P}\,\mathbf{x}_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Notar que $\mathbf{x}_n = \mathbb{P}^n\,\mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}_0$ es un vector inicial.
3. Sabiendo que $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y que $\mathbb{P}$ tiene autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{10}$ y $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{10}$.
   a) Sabiendo que el límite $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$ existe, muestre que este límite es autovector de $\mathbb{P}$. ¿Asociado a qué autovalor?
   b) ¿Depende el límite anterior del estado inicial $\mathbf{x}_0$?

Problema 14

Dos vehículos se acercan a lo largo de una misma ruta, viajando en sentido opuesto a velocidades v_1 y v_2, respectivamente. Ambos vehículos tienen activadas sus bocinas que, cuando están en reposo, emiten un sonido puro de $f_0 = 440$ Hz y de similar intensidad. La velocidad del sonido es $v_s = 343$ m/s. Un micrófono registra el sonido de las bocinas en un intervalo de tiempo alrededor del instante t_0, cuando ambos vehículos están equidistantes al micrófono.

Alrededor de t_0, el micrófono mide una amplitud de sonido descripta aproximadamente por $A(t) \propto \sin(2\pi \, \frac{5}{4} \, f_0 \, t) \cdot \sin(\pi \, \frac{1}{100} \, f_0 \, t)$. Estime las velocidades v_1 y v_2.