

1. Considere el sólido W encerrado por el cono $x^2 + y^2 = 4z^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, siendo $z \geq 0$. Sea ∂W la frontera de W orientada con la normal exterior y $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$.

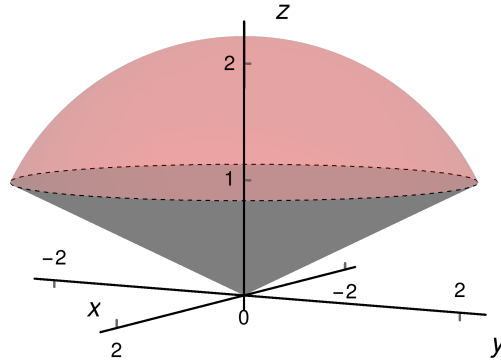
(a) Calcular $\text{vol}(W)$ (el volumen de W).

(b) Mostrar que el máximo valor que alcanza la función $\text{div}(\vec{F})$ en W es 4.

(c) Probar que

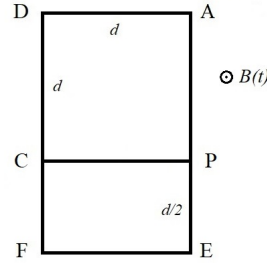
$$\left| \int_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{S} \right| \leq 4\text{vol}(W).$$

(d) Sea $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 5, z \geq 1\}$ el casquete esférico superior de ∂W (orientado con la misma normal que ∂W). Calcular $\int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$.



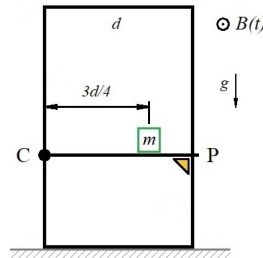
2. El circuito de la figura está formado por alambres con una resistencia por unidad de longitud r [Ω/m]. Las longitudes de los elementos del circuito son d y $d/2$, según se indica en la figura. El circuito se encuentra inmerso en un campo magnético homogéneo, perpendicular al plano del dibujo, cuya intensidad cambia con el tiempo según $B(t) = kt$, con $t \geq 0$.

(a) Despreciando efectos de autoinducción, calcule las corrientes que circulan en cada rama del circuito.



Suponga ahora que la rama inferior del circuito se encuentra apoyada sobre una mesa. El punto C es articulado y el punto P puede deslizar, manteniendo en todo momento la continuidad eléctrica, pero posee un tope que previene la caída de la barra CP (de masa despreciable). Una pesa de masa m se coloca sobre la barra tal como indica la figura. Todo el sistema se encuentra bajo la acción de la gravedad.

(b) ¿Para qué valor del tiempo t la reacción en el soporte P se anula?



3. Un disco homogéneo de masa m y radio R está unido rígidamente al extremo de una varilla de largo R y masa despreciable. El otro extremo de la varilla está sujeto al techo de manera que el sistema disco-varilla puede girar libremente alrededor del punto O , bajo la acción de la gravedad. Se denomina θ al ángulo que se forma entre la varilla y el techo.

El sistema se encuentra en reposo cuando el disco está en contacto con el techo en la posición que se indica en la figura. A tiempo $t = 0$ el disco se despegas del techo, y el sistema disco-varilla rota alrededor del punto O como un cuerpo rígido hasta alcanzar la posición $\theta = \pi/2$. En ese momento ($t = t_1$), el disco se separa de la varilla y continúa con su movimiento como cuerpo libre hasta alcanzar el suelo en $t = t_2$. La distancia desde el suelo hasta el techo es $H = 10R$.

Dato: el momento de inercia del disco respecto de su centro de masa es $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$.

- (a) Determine la velocidad del centro de masa del sistema disco-varilla en t_1 .
- (b) Calcule $t_2 - t_1$ e indique la posición del disco al alcanzar el suelo.
- (c) ¿Cuántas vueltas da el disco entre t_1 y t_2 ?

