Índice general

Examen 2012 **1**
Problema 1, Óptica 2
Problema 2, Cálculo Diferencial 4
Problema 3, Mecánica 6
Problema 4, Electricidad y Magnetismo 8
Problema 5, Cálculo integral 10
Problema 6, Termodinámica 12
Problema 7, Termodinámica 14
Problema 8, Mecánica 15
Problema 9, Algebra y Geometría 17
Problema 10, Mecánica 20
Problema 11, Multiplicadores de Lagrange 22
Problema 12, Electromagnetismo 24

http://www.ib.edu.ar

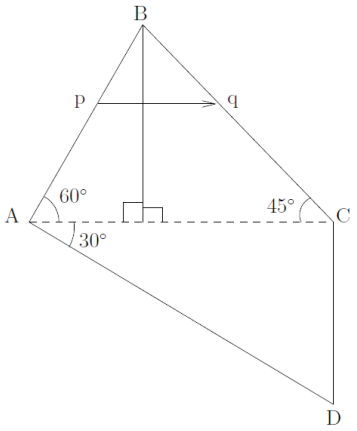
Examen 2012

http://www.ib.edu.ar

Problema 1, Óptica

Se tiene un prisma cuya base ABCD se muestra en la figura, construido con un material transparente cuyo índice de refracción es n = 1.56. El prisma está inmerso en el aire ($n_0 = 1$). Un rayo de luz entra en el prisma por el punto p y sigue la trayectoria pq, marcada por la flecha, que es paralela al segmento $\overline{AC}$.

[h]



1. Dibujar la trayectoria completa del rayo de luz, desde antes de ingresar al prisma (rayo incidente) hasta después de su salida al aire.

2. Calcular el ángulo de desviación entre el rayo incidente y el emergente.

Respuesta

Primero calculemos el ángulo de incidencia con que entró el rayo al prisma. Por la ley de Snell:

$$n_0 \sin\theta = n \sin 30$$

Vemos entonces que el rayo incide a 51.26º sobre el lado AB del prisma. Para ver con que ángulo incide en el lado BC, trazamos la normal al lado en el punto q y vemos que el ángulo de incidencia es de 45º.

Una vez que el rayo incide sobre BC pueden pasar dos cosas: una parte se refleja y otra se refracta y ya salió al aire o tenemos reflexión total. Para ver si pasa esto último, calculamos el ángulo crítico:

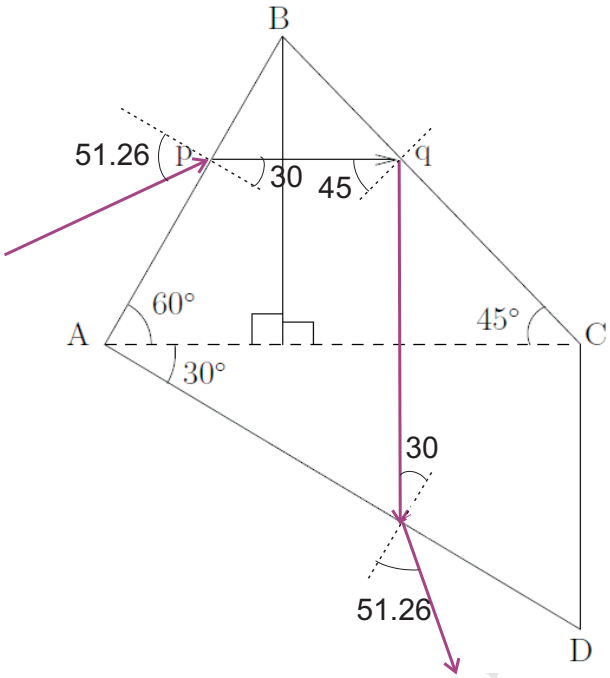
$$1{,}56 \sin\theta_C = 1 \sin 90 \Rightarrow \theta_C = 39{,}87$$

Como el ángulo de incidencia (45º) es mayor que θ_C tenemos reflexión total. El rayo reflejado a 45º incide sobre el lado AD con un ángulo de 30º. Este rayo se refracta (pasa a un medio de menor índice de refracción) y ya sale al aire. Va a salir con un ángulo igual al ángulo de incidencia inicial debido a la geometría de este prisma:

$$1{,}56 \sin 30 = 1 \sin\theta_S \Rightarrow \theta_S = 51{,}26$$

Se ve fácilmente que el ángulo de desviación del rayo desde que entra al prisma hasta que sale fue de 90º.

http://www.ib



http://www.

Problema 2, Cálculo Diferencial

Un famoso resultado de Brook Taylor dice que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que posea n derivadas en x_0 puede escribirse como $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ donde $P_n(x)$ es el conocido Polinomio de Taylor de f centrado en x_0 y $R_n(x)$ es el resto de Taylor. Se conocen varias formas para $R_n(x)$. Por ejemplo, si f tiene n + 1 derivadas en un intervalo abierto que contiene a x_0 y a x,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

para algún número ξ entre x_0 y x.
En este ejercicio se desea hallar valores aproximados de e^x para valores pequeños de x.

1. Aproximar e^x por un polinomio de Taylor $P(x)$ centrado en x_0 = 0, de manera tal que al aproximar e^x por $P(x)$ para cualquier x entre 0 y 0,5 el error cometido sea inferior a 0,01.

2. Probar que $P(x)$ satisface la condición pedida sobre el error.

3. Utilizando $P(x)$, hallar $e^{0,2}$ con error menor que 0,01.

4. En base a la estimación del error hallada en los puntos anteriores, ¿puede afirmarse que las dos primeras cifras después de la coma en la aproximación de $e^{0,2}$ hallada en el punto anterior son correctas?

Respuesta

1. Tenemos que aproximar la función e^x alrededor del punto $x_0 = 0$, de manera que el error cometido sea menor a $0{,}01$, para x variando entre 0 y $1/2$. Para ello, tenemos que encontrar cuál es menor orden n del polinomio de Taylor que da como resto un número menor a $0{,}01$. Por un lado, sabemos que

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{e^{\frac{1}{2}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \tag{1}$$

para cualquier $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Por lo tanto, requerimos que

$$\frac{e^{\frac{1}{2}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 0{,}01\,, \tag{2}$$

o equivalentemente, que

$$\frac{1}{2^{n+1}\,(n+1)!} < 0{,}01e^{-\frac{1}{2}} = 0{,}00606531\,. \tag{3}$$

Como el término izquierdo de la ecuación (3) es decreciente con n, basta con encontrar el primer n a partir del cual vale la desigualdad (y luego la misma vale para todos los n superiores). Esto se logra para $n = 3$, por lo que la aproximación requerida es entonces el polinomio de Taylor de orden $n = 3$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = P_3(x)\,. \tag{4}$$

http://www.ib.edu.ar

2. El método utilizado en el punto 1 prueba este apartado (de las desigualdades (1) y (2) se ve que el error es menor a $0{,}01$ si n≥ 3).

3. Usando $P(x)$, tenemos que

$$e^{0{,}2} \approx P_3(0{,}2) = 1 + 0{,}2 + \frac{0{,}2^2}{2} + \frac{0{,}2^3}{6} = 1{,}221333\ldots \tag{5}$$

4. En base a la estimación del error hallado, no puede afirmarse que las dos primeras cifras después de la coma sean correctas; lo que sabemos es que

$$e^{0{,}2} = P_3(0{,}2) + R_3(0{,}2)\ , \tag{6}$$

y como de $R_3(0{,}2)$ sólo sabemos que es menor a $0{,}01$, si fuera, por ejemplo, $R_3(0{,}2) = 0{,}009$ esto daría un valor permitido para $e^{0{,}2} = 1{,}230333\ldots$ (sin embargo, a pesar de que el método no nos permite asegurarlo, con una calculadora podemos chequear que efectivamente las dos primeras cifras después de la coma son correctas).

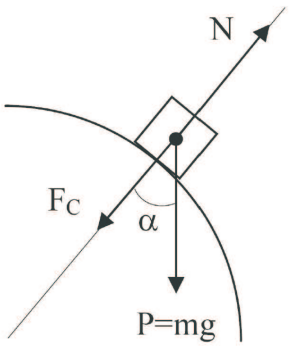
http://www.ib.edu.ar

Problema 3, Mecánica

Un bloque pequeño está apoyado en el punto mas alto de una esfera fija al suelo. La esfera tiene 1 m de diámetro. El bloque comienza a deslizar sin rozamiento sobre la superficie de la esfera, con velocidad inicial despreciable. Calcular la distancia entre el punto de apoyo de la esfera y el punto en donde el bloque toca el suelo. La aceleración de la gravedad es g = 9,8 m/s^2.

Respuesta

Lo primero que tenemos que determinar es el punto en el cual el bloque se separa de la esfera, si es que esto ocurre. Para eso, consideremos el diagrama de la figura siguiente:



Intentaremos encontrar el momento en el que la fuerza N, normal a la superficie de la esfera, se hace cero. Analizando las componentes de las fuerzas en la dirección que une el centro del bloque con el centro de la esfera (la línea delgada en el dibujo) tenemos:

$$F_C = mgcos\alpha - N, \tag{7}$$

donde F_C es la fuerza centrípeta y $P = mg$ el peso del bloque. En el momento en el que $N = 0$,

$$F_C = mgcos\alpha, \tag{8}$$

y entonces, si a_C es la aceleración centrípeta,

$$a_C = gcos\alpha. \tag{9}$$

Por otro lado, sabemos que en un movimiento circular como el que describe el bloque, con velocidad v y radio r (que en este caso es el de la esfera),

$$a_C = \frac{v^2}{r}, \tag{10}$$

de manera que,

$$gcos\alpha = \frac{v^2}{r}. \tag{11}$$

Podemos calcular la velocidad haciendo uso de la conservación de la energía. Si medimos la posición vertical del bloque tomando como referencia el centro de la esfera, tenemos que:

http://www.balseiro.edu.ar

$$mgrcos\alpha + \frac{1}{2}mv^2 = mgr. \tag{12}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones, encontramos el ángulo α_D en el que el bloque se despega de la esfera:

$$2gr(1 - cos\alpha_D) = v_D^2 = rgcos\alpha_D \tag{13}$$

$$cos\alpha_D = \frac{2}{3}. \tag{14}$$

Esto ocurre a una altura $h = r(1 + cos\alpha_D) = \frac{5}{3}r$ respecto del piso y a una distancia horizontal $rsen\alpha_D = \frac{\sqrt{5}}{3}r$ respecto del punto de apoyo de la esfera.

En ese punto, el bloque comienza una caída libre con una velocidad inicial v_D cuyo módulo es fácilmente calculable usando la ecuación (7).

$$v_D = \sqrt{grcos\alpha_D} = \sqrt{\frac{2}{3}gr} \sim 1,81\ m/s. \tag{15}$$

Las componentes horizontal y vertical de esta velocidad son, respectivamente:

$$v_D^x = v_D cos\alpha_D = \sqrt{\frac{8}{27}gr} \sim 1,20\ m/s \tag{16}$$

$$v_D^y = -v_D sen\alpha_D = -\sqrt{\frac{10}{27}gr} \sim -1,35\ m/s. \tag{17}$$

Entonces, sólo resta calcular el tiempo que tarda el cuerpo en llegar al piso (conociendo su velocidad vertical) y con ese dato calcular la distancia que recorre horizontalmente. El tiempo que el cuerpo está en el aire t_a se puede despejar de la ecuación:

$$h + v_D^y t_a - \frac{1}{2}gt_a^2 = 0. \tag{18}$$

Resultan dos valores, uno negativo (que descartamos) y otro positivo, de valor:

$$t_a = \frac{v_D^y + \sqrt{(v_D^y)^2 + 2gh}}{g} = \sqrt{\frac{10r}{27g}}(\sqrt{10} - 1) \sim 0,3\ s. \tag{19}$$

Entonces, la distancia d entre el punto de apoyo de la esfera y el punto donde el bloque toca el piso es:

$$d = \frac{\sqrt{5}}{3}r + v_D^x t_a = \frac{\sqrt{5}}{3}r(1 + \frac{4}{9}(\sqrt{10} - 1)) \sim 0,73\ m. \tag{20}$$

Hemos puesto explícitamente esta última expresión analítica para mostrar que el resultado no depende de la acelaración de la gravedad. En la Luna hubiera ocurrido lo mismo, pero en un tiempo mayor.

http://www.ib.edu.ar

Problema 4, Electricidad y Magnetismo

Se desea construir un generador para alimentar la línea eléctrica domiciliaria argentina, de 220 V y 50 Hz, mediante una espira conductora giratoria inmersa en el campo magnético terrestre (≈ 0,5 gauss = 5 x 10^{-5} tesla = 5 x 10^{-5} Vs/m^2).

1. ¿Cómo conviene orientar el eje de rotación de la espira?

2. Suponiendo que la espira tiene forma circular, ¿cuál debe ser su diámetro?

3. ¿Será posible reemplazar la espira por un conjunto de espiras más pequeñas? ¿Cómo deberían conectarse mutuamente?

4. Discutir brevemente las posibilidades prácticas de construir y utilizar este tipo de generador eléctrico.

Respuesta

1. El principio de funcionamiento de un generador de este tipo se basa en que, a causa de la rotación de la espira, el flujo magnético que la atraviesa varía. Por esta razón, la orientación del eje de la espira debe ser tal que maximice la variación del flujo. Las líneas del campo magnético recorren la superficie terrestre en forma paralela a los meridianos, es decir, con dirección norte-sur. Descartemos los polos en nuestro análisis. Entonces, para lograr la máxima variación del flujo magnético, el área circunscripta por la espira debe ser paralela a un meridiano terrestre dado en algún momento de la rotación. Esto nos define un eje de rotación normal al meridiano. Ahora bien, para cada meridano existen muchas maneras de orientar el eje de rotación de la espira. Podría ser normal a la superficie de la Tierra, paralelo a ella, o con cualquier orientación intermedia. La elección depende de la dificultad de la aplicación práctica en cada caso. Un eje perpendicular a la superficie terrestre presenta la ventaja de la simetría respecto de la aceleración de la gravedad.

2. El flujo Φ generado por un campo magnético B que atraviesa una espira de superficie S que rota con una velocidad angular ω está dado por la siguiente función del tiempo:

$$\Phi = BScos(\omega t). \tag{21}$$

Las variaciones de este flujo generan una tensión V, de acuerdo a la expresión:

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega sen(\omega t). \tag{22}$$

Si tenemos en cuenta que la tensión de la línea eléctrica domiciliaria argentina es del tipo

$$V = V_{max} sen(\omega t), \tag{23}$$

con $V_{max} = \sqrt{2}\ 220V \sim 311\ V$ (los 220 V se refieren al valor eficaz de la tensión de la línea) y $\omega = 2\pi f \sim 314\ 1/s$. Entonces, podemos despejar el valor de la superficie de la espira, igualando las dos últimas ecuaciones:

http://www.ib.edu.ar

$$BS\omega sen(\omega t) = V_{max} sen(\omega t) \tag{24}$$

$$S = \frac{V_{max}}{B\omega} \sim 19800\ m^2, \tag{25}$$

que corresponde a una espira de unos 159 m de diámetro.

3. Como vimos, la tensión que genera una espira es proporcional a su área. Espiras más pequeñas generan tensiones de menor valor, por lo que es necesario combinar el efecto de varias para obtener la tensión deseada. La forma de conectar dos o más espiras es en serie, de manera de sumar las tensiones que sobre éstas se inducen. Un detalle adicional es que, además, estas tensiones tienen que estar en fase. Esto se logra si todas las espiras giran sincronizadamente.

Supongamos que colocamos N espiras, entonces el área de cada una de ellas se reduce un factor N y su diámetro un factor $\sqrt{N}$. Por ejemplo, en una configuración de 1000 espiras, el diámetro resulta de 5 m.

4. En cuanto a la factibilidad de construir un aparato con estas características, hay varios aspectos que se podrían analizar, como el tamaño o el peso del conjunto de espiras. Supongamos que queremos generar la energía eléctrica para una casa en la que se consumen unos 5000 w. Con una plancha, una pava eléctrica, una heladera y algo de iluminación se alcanza rápidamente este consumo. Sin entrar en detalles relacionados con la manera en que hay que calcularla, resulta que se necesita una corriente de unos 20 A. Si aceptamos que por un conductor de cobre pueden circular unos 5 A por cada milímetro cuadrado de sección sin tener problemas de calentamiento (una estimación usual en instalaciones domiciliarias), nos queda que el alambre de cada espira debe tener aproximadamente 4 mm^2 de sección.

Por otro lado, tenemos que definir el diámetro de las espiras. Un aparato de un metro parece lo suficientemente grande y molesto, pero analicemos qué resultaría en tal caso. Usando lo que vimos antes, en el punto 3, si el diámetro es de 1 m hacen falta unas 25000 espiras para lograr el voltaje deseado. Entonces vemos que tenemos juntar 25000 espira s de 4 mm^2 de sección, lo que es equivalente a 100000 mm^2 de sección total o 35 cm de diámetro.

En principio parece un aparato desproporcionado, teniendo en cuenta su baja capacidad de generación. Podríamos también estimar su masa, a partir del cálculo de su volumen ($\sim$3x10^5 cm^3). Suponiendo que se construye de cobre, que tiene una densidad de aproximadamente 9 g/cm^3, resulta una masa de casi 3000 kg. Lo que nos confirma que probablemente sea preferible buscar alguna alternativa para procurarnos la electricidad en nuestro hogar.

http://www.ib.edu.ar

Problema 5, Cálculo integral

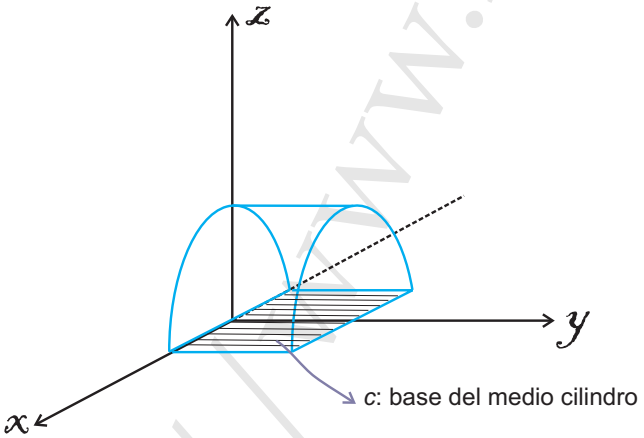
En $\mathbb{R}^3$, sea S_1 el cilindro sólido dado por $x^2 + z^2 \leq R^2$ y $0 \leq y \leq R$, donde R es una constante positiva. Denotaremos por C_1 a la superficie exterior de S_1 (incluyendo las "tapas"), con la orientación dada por la normal exterior. Además, se define C_2 como la parte de la superficie C_1 que satisface $z \geq 0$, con la misma orientación que C_1. Por último, se tiene el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, z, -2xz + x^2)$.

1. Calcular el flujo de $\mathbf{F}$ sobre la superficie C_2, es decir, hallar $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$.

2. Sin evaluar ninguna integral de superficie, calcular el flujo de $\mathbf{F}$ sobre C_1, justificando cuidadosamente la respuesta.

Respuesta

1. Primero dibujamos la figura y tenemos que entender bien sobre que superficie nos están pidiendo calcular el flujo.



S_1 es el cilindro sólido, C_1 es la superficie de S_1 y C_2 es la mitad de la superficie C_1 y es una superficie abierta (ojo, no incluye a la base del medio cilindro). Para poder usar el teorema de la divergencia, y simplificar las cuentas, necesitamos una superficie cerrada. Consideramos entonces la superficie cerrada C_3 formada por C_2 más la base del medio cilindro C, calculamos el flujo sobre ella y a eso le restamos el flujo sobre la base del medio cilindro para obtener lo que nos piden. Entonces:

$$\int_{C_3} \overline{F} \cdot d\overline{A} = \int_V \nabla \cdot \overline{F} dV$$

Ahora calculamos la divergencia del campo vectorial:

$$\nabla \cdot \overline{F} = 2x - 2x = 0$$

O sea que el flujo sobre la superficie cerrada C_3 es nulo. Calculamos ahora el flujo sobre la base del medio cilindro cuya normal exterior es (0,0,-1), teniendo en cuenta que en la base $z = 0$:

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{n} dA = -\int_0^R \int_{-R}^R x^2 dx dy = -\frac{2R^4}{3}$$

http://www.ib.edu.ar

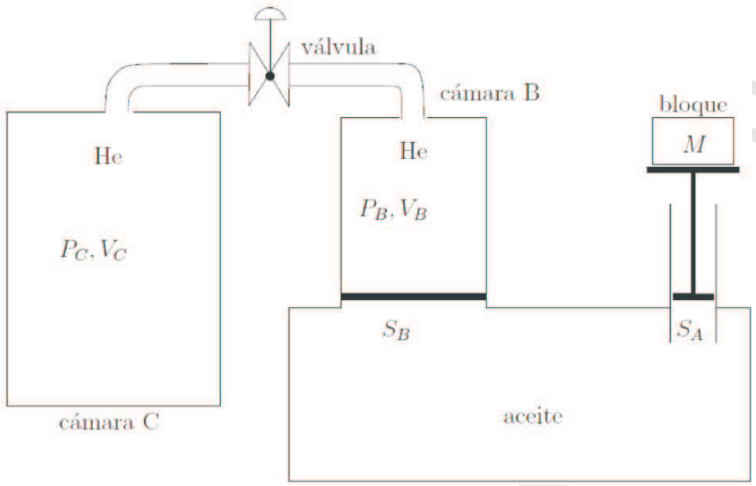
Entonces:

$$\int_{C_2} \overline{F} \cdot d\overline{A} = \int_{C_3} \overline{F} \cdot d\overline{A} - \int_{C} \overline{F} \cdot \overline{n} dA = \frac{2R^4}{3}$$

2. Al ser C_1 una superficie cerrada, podemos aplicar el teorema de la divergencia para calcular el flujo de **F** sobre ella. Cómo la divergencia de **F** es siempre igual a 0, el flujo de **F** sobre C_1 es nulo.

http://www.ib.edu.ar

Problema 6, Termodinámica



Una máquina hidráulica consiste en un recipiente completamente lleno de aceite, con dos pistones de secciones $S_A = 10\ \text{cm}^2$ y $S_B = 40\ \text{cm}^2$, como muestra la figura. Inicialmente, los dos pistones se encuentran al mismo nivel. El primer pistón sostiene un bloque de masa M, y el segundo comprime una cámara (B) que contiene gas helio a 120 kPa. Esta cámara está unida a otra cámara (C) a través de un tubo de volumen despreciable que posee una válvula, inicialmente cerrada. La cámara C también contiene helio, pero a una presión de 140 kPa. El volumen de la cámara C es de 2 litros, mientras que el gas en la cámara B ocupa inicialmente 1 litro.
Puede considerarse que el aceite es un líquido incompresible, de 920 kg/m^3 de densidad. El helio es un gas ideal, y todo el sistema se encuentra a la misma temperatura. La aceleración de la gravedad es 9,8 m/s^2.

1. Al abrir la válvula, ¿cuánto sube el bloque respecto de su nivel inicial?

2. Determinar el trabajo realizado sobre el bloque. ¿Qué componente del sistema suministró dicha energía?

Respuesta

En primer lugar, si P_C, P_B, V_B y V_C son las presiones y volúmenes iniciales, tenemos que

$$P_C V_C + P_B V_B = P_F V_F, \tag{26}$$

donde F se refiere al estado al que llega el gas después de abrir la válvula. Además, sabemos que en este estado

$$P_F = P_A + \rho g h, \tag{27}$$

con ρ la densidad del líquido, P_A la presión que ejerce el bloque sobre el pistón A y h la diferencia de altura entre los pistones A y B. Aunque no esté explícitamente indicado en el dibujo, se entiende que los pistones A y B están asociados a las áreas S_A y S_B, respectivamente. L a presión P_A se mantiene constante en todo momento. Entonces, podemos usar la información que brinda el enunciado respecto de la condición inicial (antes de abrir la

válvula) para calcularla. En el estado inicial el nivel del líquido en A es el mismo que en B, de manera que las presiones P_A y P_B son iguales, y en consecuencia:

$$P_F = P_B + \rho g h, \tag{28}$$

A fin de describir la posición de los pistones, podemos establecer en cada rama un sistema de referencia con origen en el nivel inicial y con valores positivos hacia arriba. Entonces,

$$h = h_A - h_B. \tag{29}$$

Podemos relacionar estos desplazamientos a través de las áreas de los pistones:

$$S_A h_A = -S_B h_B, \tag{30}$$

de manera que

$$h_A = -4h_B = \frac{4}{5}h. \tag{31}$$

Por último, podemos escribir el volumen final como:

$$V_F = V_B + V_C - h_B S_B = V_B + V_C + h_A S_A. \tag{32}$$

Combinando todo se llega a una expresión cuadrática con h_A como variable:

$$V_C(P_B - P_C) + (\frac{5}{4}(V_B + V_C)\rho g + P_B S_A)h_A + \frac{5}{4}\rho g S_A h_A^2 = 0, \tag{33}$$

cuya solución positiva, y respuesta a la pregunta 1, es $h_A = 0,26\ m$.

Para calcular el trabajo W realizado sobre el bloque (pregunta 2), basta con multiplicar la fuerza que éste ejerce sobre el pistón por la diferencia de altura entre los estados inicial y final:

$$W = F_A h_A. \tag{34}$$

Esta fuerza F_A es igual al área del pistón A por la presión P_A, que ya habíamos visto que es constante e igual a la presión inicial P_B. De manera que el trabajo realizado sobre el bloque resulta:

$$W = P_B S_A h_A = 31,2\ J. \tag{35}$$

Para terminar, sólo nos falta analizar qué componente del sistema suministró esta energía, y en este caso parece bastante claro que proviene de los cambios de presión que se produjeron en los volúmenes que contienen He.

http://www.ib.edu.ar

Problema 7, Termodinámica

Usualmente, en los bares se calienta leche utilizando vapor de agua a alta presión, disponible en las máquinas para elaborar café espresso. Se hace burbujear el vapor en la leche a través de una boquilla produciéndose, además del calentamiento, gran agitación y mucha espuma. El método es rápido, y la masa de líquido en el recipiente aumenta muy poco. ¿Cuáles son los mecanismos físicos que causan el calentamiento? ¿Cuál es el más relevante? ¿Por qué?

Respuesta

La idea del problema es que discutan que procesos físicos están involucrados para ver como aplican diferentes conceptos,o sea, no hay una única respuesta correcta.

Yo empezaría pensando que es lo que hace que la leche se caliente. El vapor que sale por la boquilla está entregando energía al hacer la transición de vapor a agua (la leche está fría entonces baja la temperatura del vapor que cuando llega a 100 C se convierte en agua). Según cuantos gramos de vapor agregue será la cantidad de energía que le entrego a la leche y de ello depende hasta que temperatura la llevo. La boquilla por la que sale el vapor está caliente, por ese lado tal vez haya conducción de calor entre el metal y la leche.

http://www.ib.edu.ar

Problema 8, Mecánica

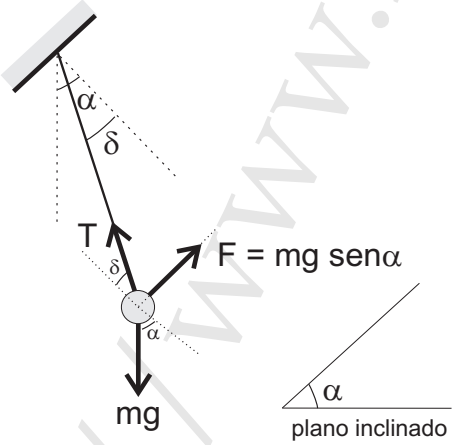
Un péndulo de longitud l y masa m cuelga del techo de un vagón que desliza sin fricción sobre una rampa inclinada. La rampa forma un ángulo α con la horizontal.

1. ¿Cuál es la dirección de la posición de equilibrio de la cuerda del péndulo?

2. ¿Cuál es el período de oscilación del péndulo cuando realiza oscilaciones de amplitud pequeña?

Respuesta

a) Tomamos los ejes x e y solidarios al vagón. Si el vagón está quieto, la posición de equilibrio de la cuerda del péndulo es la vertical. Como está deslizando por el plano inclinado debido a su propio peso, aparece sobre el péndulo una fuerza ficticia $F = mgsen\alpha$ que corre esa posición de equilibrio en un cierto ángulo hacia la derecha. Vamos a calcular cuánto vale ese ángulo. Tenemos la situación que se muestra en la figura.



Buscamos la posición de equilibrio haciendo la sumatoria de las fuerzas en la dirección x e y e igualándolas a cero.

$$\sum F_x = F + Tsen\delta - mgsen\alpha = 0$$

$$\sum F_y = Tcos\delta - mgcos\alpha = 0$$

Con estas ecuaciones vemos que el ángulo $\delta = 0$ y la posición de equilibrio de la cuerda es perpendicular a la superficie del plano inclinado.

b) Para pequeñas oscilaciones, el período de un péndulo de longitud L es $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Cómo el péndulo está en un vagón en movimiento, tenemos una contribución extra a la aceleración asi que tenemos que calcular cuál es la aceleración efectiva g_{ef}.

$$g_{ef} = \sqrt{g_{efx}^2 + g_{efy}^2}$$

Donde

$$g_{efx} = gsen\alpha cos\alpha$$

http://www.ib.edu.ar

$$g_{efy} = gsen\alpha sen\alpha - g = -gcos^2\alpha$$

Calculando la g_{ef} vemos que el período de oscilación del péndulo dentro del vagón en movimiento es $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{gcos\alpha}}$.

http://www.ib.edu.ar

Problema 9, Algebra y Geometría

Sean L_1 la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por (1,1,1) con dirección (1,1,2) y M_1 el plano ortogonal a L_1 que contiene al punto (2,-2,-1).

1. Hallar $L_1 \cap M_1$. Decidir si se trata del conjunto vacío, un punto, una recta o un plano.

2. Si L_2 es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos (0,2,1) y (2,0,1), hallar la ecuación del plano M_2 que contiene a L_1 y L_2.

3. Decidir si el conjunto $M_1 \cap M_2$ es vacío, una recta o un plano en $\mathbb{R}^3$. Si se trata de una recta, dar su dirección y un punto por el que pase. Si se trata de un plano, dar un vector normal al mismo y un punto contenido en él.

4. Sea L_2' la recta paralela a L_2 que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$. Hallar la menor distancia entre puntos de L_1 y puntos de L_2'. ¿Qué puntos de las rectas se encuentran a esta distancia?

Respuesta

1. Para hallar $L_1 \cap M_1$ tenemos que encontrar primero las ecuaciones de la recta L_1 y del plano M_1 (como el plano es perpendicular a la recta nuestra intuición geométrica nos dice que esta intersección es un punto). Para la recta utilizamos la representación paramétrica, que dado un punto (x_0, y_0, z_0) contenido en la recta y un vector (v_x, v_y, v_z) paralelo a la recta, toma la expresión

$$L_1 = \left\{(x,y,z) \in R^3 : (x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda\,(v_x,v_y,v_z)\,,\ \lambda \in R\right\}\,. \tag{36}$$

Para M_1 podemos utilizar la ecuación del plano dado un vector (n_x, n_y, n_z) normal al mismo y un punto (x_1, y_1, z_1) contenido en el plano

$$M_1 = \left\{(x,y,z) \in R^3 : (x-x_1, y-y_1, z-z_1)\cdot(n_x,n_y,n_z) = 0\right\}. \tag{37}$$

De los datos del enunciado sabemos que $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$, $(v_x, v_y, v_z) = (1,1,2)$, $(n_x, n_y, n_z) = (1,1,2)$ y $(x_1, y_1, z_1) = (2,-2,-1)$. Con estos datos, las expresiones (36) y (37) se transforman en

$$L_1 = \left\{(x,y,z) \in R^3 : x = 1+\lambda\,,\ y = 1+\lambda\,,\ z = 1+2\lambda\,,\ \lambda \in R\right\}\,, \tag{38}$$

y

$$M_1 = \left\{(x,y,z) \in R^3 : x+y+2z+2 = 0\right\}\,. \tag{39}$$

Para hallar la intersección hay buscar los puntos que están simultáneamente en L_1 y M_1, esto es

$$L_1 \cap M_1 = \left\{(x,y,z) \in R^3 : (x,y,z) \in M_1 \ \wedge\ (x,y,z) \in L_1\right\}\,. \tag{40}$$

http://www.ib.edu.ar

Si existe algún elemento en la intersección, entonces sus coordenadas (x, y, z) verifican simultáneamente las ecuaciones en las expresiones (38) y (39), por lo que podemos decir que $x = 1 + \lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = 1 + 2\lambda$ y reemplazar x, y y z en la ecuación del plano para obtener una ecuación para λ

$$6\lambda + 6 = 0\,, \tag{41}$$

de donde sale que $\lambda = -1$. Luego, con este valor de λ vamos a la expresión (38) y obtenemos el punto asociado al parámetro $\lambda = -1$. Finalmente

$$L_1 \cap M_1 = \{(0, 0, -1)\}\ , \tag{42}$$

que, como podemos verificar fácilmente está en L_1 y en M_1.

2. Para resolver este apartado hallamos primero una ecuación que describa a L_2. Para ello, podemos volver a utilizar la representación paramétrica de una recta, ya que conocemos su dirección: la dirección de L_2 es paralela al vector, que denominamos $\overline{u}$, que une los puntos $(0, 2, 1)$ y $(2, 0, 1)$; es decir, L_2 es paralela al vector $\overline{u} = (2, -2, 0)$ y pasa por $(0, 2, 1)$. Por lo tanto

$$L_2 = \left\{(x, y, z) \in R^3 : x = 2\lambda\,,\ y = 2 - 2\lambda\,,\ z = 1\,,\ \lambda \in R\right\}\ . \tag{43}$$

En realidad, para hallar el plano M_2 que contiene a L_1 y L_2 alcanza sólo con encontrar un vector como $\overline{u}$, paralelo a L_2, ya que para conseguir un vector normal al plano M_2 podemos tomar el resultado de hacer el producto vectorial entre un vector paralelo a L_1 y otro paralelo a L_2 (en el apartado anterior se nos daba un vector paralelo a L_1: $\overline{v} = (1, 1, 2)$). Un vector perpendicular al plano M_2 es entonces

$$\overline{v} \times \overline{u} = (-4, -4, 4)\ . \tag{44}$$

Como la recta L_2 pasa por el punto $(0, 2, 1)$ y está contenida en M_2, entonces el punto $(0, 2, 1)$ pertenece a M_2. Luego, como tenemos una dirección normal al plano M_2 y un punto contenido en él, podemos hallar su ecuación (tal y como hicimos con M_1)

$$M_2 = \left\{(x, y, z) \in R^3 : -4x - 4y + 4z + 4 = 0\right\}\ . \tag{45}$$

3. En este apartado tenemos que caracterizar el conjunto intersección entre M_1 y M_2. Para ello, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones dado por

$$x + y + 2z + 2 = 0 \ \wedge\ -x - y + z + 1 = 0\,, \tag{46}$$

cuya solución son justamente los puntos que pertenecen a ambos planos (notar que dividimos por 4 en ambos miembros de la ecuación del plano M_2). Sumando ambas ecuaciones obtenemos $3z + 3 = 0$, de donde sale que $z = -1$. Luego, imponiendo $z = -1$ en alguna de las dos ecuaciones anteriores obtenemos $x + y = 0$, de donde sale que $y = -x$. Luego, todos los puntos dados por $(x, -x, -1)$, para todo $x \in R$ satisfacen el sistema de ecuaciones (46). Por lo tanto

$$M_1 \cap M_2 = \left\{(x, y, z) \in R^3 : x = t\,,\ y = -t\,,\ z = -1\,,\ t \in R\right\}\ , \tag{47}$$

es la intersección buscada; es una recta y la pudimos caracterizar con su representación paramétrica (pasa por el punto $(0, 0, -1)$ y es paralela al vector $(1, -1, 0)$).

http://www.ib.edu.ar

4. Primero caracterizamos a la recta L_2', que pasa por el origen y es paralela al vector $\overline{u} = (2, -2, 0)$

$$L_2' = \left\{(x, y, z) \in R^3 : x = 2\eta\,,\ y = -2\eta\,,\ z = 0\,,\ \eta \in R\right\}\,. \tag{48}$$

La distancia, entre un punto $(2\lambda, -2\lambda, 0)$ de la recta L_1 y otro $(1+\eta, 1+\eta, 1+2\eta)$ de la recta L_2', está dada por

$$d = \sqrt{(1+\eta-2\lambda)^2 + (1+\eta+2\lambda)^2 + (1+2\eta)^2}\,. \tag{49}$$

Minimizar la distancia es equivalente a minimizar la distancia al cuadrado, por lo que nuestro problema se reduce a encontrar el/los mínimo/s de la función

$$f(\lambda, \eta) = (1+\eta-2\lambda)^2 + (1+\eta+2\lambda)^2 + (1+2\eta)^2\,, \tag{50}$$

en el dominio definido por $(\lambda, \eta) \in R^2$. Para hallar un extremo pedimos que el gradiente de f sea el vector nulo. De esta condición se desprende el sistema de ecuaciones siguiente

$$16\lambda = 0 \ \wedge\ 12\eta + 8 = 0\,, \tag{51}$$

de donde obtenemos $\lambda = 0$ y $\eta = -\frac{2}{3}$. La distancia mínima es entonces

$$d_{min} = \sqrt{f\left(0, -\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \tag{52}$$

y los puntos que se encuentran a esa distancia son $(0, 0, 0)$, de la recta L_1, y $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, de la recta L_2'.

http://www.ib.edu.ar

Problema 10, Mecánica

Cuando una cuerda elástica se estira una longitud Δx respecto de su longitud natural, ejerce en sus puntas una fuerza proporcional a Δx, dirigida a lo largo de la cuerda. En cambio, si sus extremos están a una distancia menor o igual que la longitud natural, la fuerza ejercida es nula. En presencia de la gravedad, se cuelga un cuerpo de masa m de una cuerda elástica sin masa como la descripta arriba, y se le imprime cierta velocidad en la dirección vertical de modo que comienza a oscilar. Se observa que, cuando la amplitud de las oscilaciones es suficientemente grande, la frecuencia es prácticamente independiente de la masa del cuerpo. A medida que la amplitud decrece, en cambio, la dependencia con la masa del cuerpo se hace cada vez más apreciable. Explicar esta observación.

Respuesta

En el enunciado del problema no está claramente definida la disposición de la cuerda y ni la del cuerpo. Podríamos tener, por ejemplo:

1) una soga vertical sujeta a un punto fijo en su extremo superior y con el cuerpo colgando en el inferior (haciendo bungee jumping),

2) una soga horizontal, sujeta en ambos extremos y con el cuerpo colgando en el medio (una remera secándose al sol),

3) cualquier otra configuración que involucre sólo una soga y un cuerpo en movimiento oscilatorio vertical.

Elegimos la primera, que parece la más simple de analizar. Al colgar el cuerpo, la soga se estira una longitud Δx_0 tal que $k\Delta x_0 = mg$, donde k es la constante de proporcionalidad entre la fuerza que se ejerce sobre la cuerda y su elongación. En esa posición, el cuerpo está en equilibrio.

Definimos un sistema de coordenadas unidimensional, vertical, con origen en esta posición de equilibrio y con signo positivo hacia arriba. Veamos ahora qué ocurre cuando se hace oscilar al cuerpo con una amplitud menor a Δx_0. La ecuación de movimiento que describe esta situación es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - \Delta x_0) - mg = -kx. \tag{53}$$

Esto no es más que la ecuación de un oscilador armónico, que tiene una solución del tipo:

$$x = Asen(\omega t + \theta)), \tag{54}$$

donde A es la amplitud de oscilación, θ la fase inicial y ω la velocidad angular. En este caso simple, ω es igual a $\sqrt{k/m}$; de manera que la frecuencia de oscilación, $f = \omega/2\pi$, es claramente dependiente de la masa del cuerpo.

En lo que hemos calculado, la cuerda se encuentra estirada en todo momento. Esta condición se pierde al aumentar la amplitud a valores mayores que $\Delta x_0 = mg/k$. En este caso, conviene separar el problema en dos etapas: una en la que el movimiento del cuerpo está determinado por su interacción con la cuerda ($x \leq \Delta x_0$) y otra que se puede describir como un tiro vertical ($x \geq \Delta x_0$). En la segunda etapa la cuerda no tiene ninguna influencia, dado que no tiene masa y su longitud es menor que la natural. Para simplificar las cuentas, vamos a suponer que la amplitud de oscilación es mucho más grande que Δx_0, y así despreciar esta última distancia. Es decir, el problema se divide ahora en lo que sucede en

http://www.ib.edu.ar

$x \leq 0$ y en $x \geq 0$. Vamos a calcular el período T de una oscilación completa como la suma de los tiempos t_1 y t_2 necesarios para realizar cada una de las etapas.

La ecuación de movimiento que gobierna la primera etapa es la que escribimos más arriba, de manera que en toda esta parte de la trayectoria del cuerpo el razonamiento es equivalente: la frecuencia de oscilación depende de la masa del cuerpo. Como dijimos esta ecuación tiene una solución del tipo:

$$x = Asen(\omega t + \theta). \tag{55}$$

El semiperíodo del movimiento descripto por esta ecuación es el tiempo t_1 requerido para completar una vez esta parte del recorrido.

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{56}$$

Se puede calcular la velocidad con que llega a la posición $x = 0$, que resulta:

$$v_0 = A\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{57}$$

Nos falta ahora encontrar una expresión que describa la posición en función del tiempo en $x \geq 0$ para poder calcular t_2. Esta etapa no es más que un tiro vertical de un cuerpo que parte de la posición $x = 0$ con una velocidad inicial v_0. No haremos las cuentas aquí, pero se puede calcular que el tiempo t_2 que tarda el cuerpo en volver al mismo punto es igual a $2v_0/g$. Entonces el período T de oscilación resulta:

$$T = t_1 + t_2 = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{2v_0}{g}. \tag{58}$$

Si la velocidad inicial es muy grande, podemos despreciar el primer término de esta ecuación. Entonces el período, y en consecuencia la frecuencia de oscilación también, se torna independiente de la masa.

Un detalle no menor es que el enunciado indica que al cuerpo se le imprime una cierta velocidad para que comience a oscilar. De manera que podemos analizar independientemente los efectos de variar la masa o la velocidad inicial. Distinto es el caso en el que la oscilación se produce apartando el cuerpo de su posición de equilibrio, pero no lo resolveremos aquí.

http://www.ib.edu.ar

Problema 11, Multiplicadores de Lagrange

> Un depósito de mercadería acepta almacenar cajas cuyo largo más dos veces el ancho más tres veces el alto no supere los 12 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de las cajas de mayor volumen que se pueden almacenar en ese depósito? Justificar cuidadosamente la respuesta.

Respuesta

En el problema se nos pide encontrar las dimensiones de la caja de mayor volumen, con forma de prisma, que cumpla la siguiente condición

$$l + 2a + 3h \leq 12m\,, \tag{59}$$

donde l es la longitud de la caja, a es el ancho y h es su altura.

Como queremos encontrar la caja más grande, es claro que el vínculo que nos interesa es la igualdad en la ecuación (59). Es decir, queremos encontrar los valores de l, a y h que maximizan la función volumen $V\,(l,a,h) = l.a.h$, sujetos a la siguiente condición $g\,(l,a,h) - 12 = 0$, siendo $g\,(l,a,h) = l + 2a + 3h$. Para ello, utilizamos el método de los multiplicadores de Lagrange: introducimos un multiplicador λ y buscamos las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\overline{\nabla}\left[V\,(l,a,h) - \lambda g\,(l,a,h)\right] = \overline{0}\,,\ g\,(l,a,h) - 12 = 0\ . \tag{60}$$

Este sistema se reduce a las siguientes cuatro ecuaciones

$$ah - \lambda = 0\,,\ lh - 2\lambda = 0\,,\ la - 3\lambda = 0\,,\ l + 2a + 3h - 12 = 0\,. \tag{61}$$

Vemos por ejemplo que poner $\lambda = 0$ nos permite hallar soluciones al sistema, pero no nos interesan dado que dan valores nulos para una o más de las dimensiones de la caja. Claro que sí existe otra solución (esto no nos sorprende, ya que el sistema no es lineal). La misma se encuentra sencillamente para el valor de $\lambda = \frac{8}{3}$ y arroja las siguientes dimensiones para la caja

$$a = 2m\,,\ l = 4m\,,\ h = \frac{4}{3}m\,. \tag{62}$$

Sólo nos resta verificar que el punto crítico que encontramos corresponde a un máximo local para V. Para ello, construimos la matriz hessiana limitada

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial l} & -\frac{\partial g}{\partial a} & -\frac{\partial g}{\partial h} \\ -\frac{\partial g}{\partial l} & \frac{\partial^2 f}{\partial l^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial l \partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial l \partial h} \\ -\frac{\partial g}{\partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial l} & \frac{\partial^2 f}{\partial g^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial h} \\ -\frac{\partial g}{\partial h} & \frac{\partial^2 f}{\partial h \partial l} & \frac{\partial^2 f}{\partial h \partial a} & \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \end{pmatrix}$$

siendo $f = V - \lambda g = V - \frac{8}{3}g$, y la evaluamos en el punto $a = 2\,,\ l = 4\,,\ h = \frac{4}{3}$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & \frac{4}{3} & 2 \\ -2 & \frac{4}{3} & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

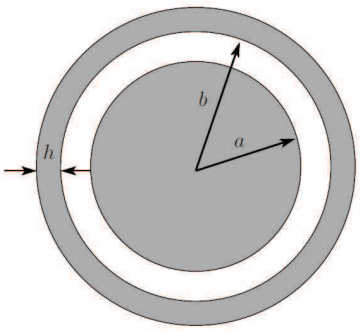
http://www.ib.edu.ar

El primer subdeterminante de 3×3 es positivo (vale $16/3$) y el primer subdeterminante de 4×4 (y único) es negativo (vale -48), por lo que efectivamente el punto obtenido corresponde a un máximo local para V.

http://www.ib.edu.ar

Problema 12, Electromagnetismo

Se tiene un sistema formado por una esfera y un cascarón esférico concéntricos, como muestra la figura. Ambos son de material conductor y están en el vacío. La esfera tiene radio a y carga eléctrica Q_1. El cascarón tiene radio interno b, espesor h, y carga eléctrica Q_2.



1. Calcular el campo electrostático en todo el espacio, y graficarlo como función de la distancia al centro de la esfera.

2. Determinar las densidades de carga eléctrica sobre todas las superficies del sistema.

3. Calcular la capacidad eléctrica del sistema.

4. Si se llena el espacio entre la esfera y el cascarón con un material de constante dieléctrica ϵ, ¿se producen cambios en el campo eléctrico? En caso afirmativo, describir los cambios; en caso negativo, explicar por qué.

Respuesta

Antes de dar las respuestas punto por punto, hacemos un análisis general.

En el problema se dice que los materiales son conductores. Esto trae como resultado que la carga eléctrica de cada uno se distribuye uniformemente sobre su superficie.

En el caso de la esfera, la carga Q_1 va a estar en la región $r = a$, distribuida uniformemente en la superficie. En el caso del cascarón, una parte q_b de la carga estará en la superficie $r = b$ y otra parte q_{b+h} en la superficie $r = b + h$.

Por supuesto, la carga total en el cascarón esférico se conserva, de donde sale que $q_b + q_{b+h} = Q_2$. Para determinar los valores de q_b y q_{b+h} necesitamos una ecuación más. La misma se desprenderá del hecho de que el campo eléctrico en el interior del cascarón esférico es nulo (ya que es un conductor). Consideremos una superficie esférica de radio r entre b y $b + h$. El flujo del campo eléctrico por esta superficie es nulo (ya que el campo es nulo). Esto nos dice que la carga total encerrada por la superficie debe ser nula, de donde sale que $q_b + Q_1 = 0$. Luego, $q_b = -Q_1$ y $q_{b+h} = Q_1 + Q_2$.

1. El campo eléctrico tiene dirección radial. El módulo del mismo sale utilizando la ley de Gauss sobre superficies esféricas con distintos radios. En las regiones $r < a$ y $b < r < b + h$, el campo eléctrico es nulo (ya que estamos en el interior de materiales conductores). Para $a < r < b$ resulta $E = kQ_1/r^2$, y para $r > b + h$ tenemos $E = k\left(Q_1 + Q_2\right)/r^2$.

2. La densidad de carga eléctrica σ_R en la superficie $r = R$, cuando la carga está distribuida uniformemente sobre la superficie, es la carga total sobre el área de la superficie. En este caso, tenemos: $\sigma_a = \frac{Q_1}{4\pi a^2}$, $\sigma_b = \frac{q_b}{4\pi b^2} = -\frac{Q_1}{4\pi b^2}$ y $\sigma_{b+h} = \frac{q_{b+h}}{4\pi(b+h)^2} = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi(b+h)^2}$.

3. En esta pregunta, la respuesta varía dependiendo de cuál sea el sistema (en el ejercicio no se aclara dónde se colocarían los cables del circuito en donde se usaría al conjunto como un capacitor). Nosotros daremos la respuesta suponiendo que el capacitor se cierra entre el centro de la esfera e infinito. Para ello, es instructivo notar que el potencial eléctrico cae en las regiones donde no hay material conductor, de manera que se puede pensar que tenemos un capacitor formado por dos capacitores en serie. La capacidad equivalente es

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{k\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b+h}\right)}\,, \tag{63}$$

donde C_1 es la capacidad de la esfera y C_2 es la capacidad del cascarón esférico.

4. Al agregar un dieléctrico sí se producen cambios; el campo eléctrico ahora E' disminuye respecto al campo E_0 que teníamos cuando entre las superficies había vacío

$$E' = \frac{E_0}{\epsilon} < E_0\,, \tag{64}$$

ya que $\epsilon > 1$.

http://www.ib.edu.ar