Índice general

Examen 2011 **1**
Problema 1, Mecánica del punto . . . 2
Problema 2, Electricidad y magnetismo . . . 3
Problema 3, Cálculo integral . . . 5
Problema 4, Mecánica del punto . . . 6
Problema 5, Ondas . . . 7
Problema 6, Ecuaciones lineales . . . 8
Problema 7, Termodinámica . . . 10
Problema 8, Probabilidad . . . 11
Problema 9, Electricidad y magnetismo . . . 13
Problema 10, Multiplicadores de Lagrange . . . 17
Problema 11, Mecánica del punto . . . 18
Problema 12, Hidrostática e Hidrodinámica . . . 20

http://www.ib.edu.ar

Examen 2011

http://www.ib.edu.ar

Problema 1, Mecánica del punto

Un satélite describe una órbita elíptica alrededor del lejano y misterioso planeta Kriptón. En el punto de máximo acercamiento, el satélite se encuentra a 10000 km del centro del planeta y se mueve a 30 km/s. En el punto de máximo alejamiento, en cambio, la distancia al centro del planeta es de 20000 km y la velocidad es de 15 km/s. ¿Cuál es la velocidad de otro satélite, que describe una órbita circular a 30000 km del centro de Kriptón?

Respuesta

Llamemos A al primer satétile, que describe una órbita elíptica y B al segundo, de órbita circular. La velocidad v_B de este último se relaciona con el radio de su órbita r_B según la ecuación siguiente

$$v_B = \sqrt{\frac{GM}{r_B}}$$

Donde G es la constante gravitacional y M la masa del misterioso planeta Kriptón. Claramente, para calcular v_B es necesario conocer el valor del producto GM. Para ello, haremos uso de la información que nos brinda el enunciado respecto del satélite A.

La energía, con sus contribuciones cinética y potencial, se conserva a lo largo de su trayectoria

$$E_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 - \frac{GMm_A}{r_A} = cte$$

De manera que

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 - \frac{GMm_A}{r_{A1}} = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 - \frac{GMm_A}{r_{A2}}$$

$$\frac{1}{2} v_{A1}^2 - \frac{GM}{r_{A1}} = \frac{1}{2} v_{A2}^2 - \frac{GM}{r_{A2}}$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a las puntos de máximo alejamiento y acercamiento, respectivamente. De esta última expresión podemos despejar GM (que es independiente de los satélites)

$$GM = \frac{1}{2}(v_{A1}^2 - v_{A2}^2)\frac{r_{A1} r_{A2}}{r_{A2} - r_{A1}}$$

Finalmente, introduciendo este valor de GM en la primera ecuación, resulta una velocidad v_B de 15 km/s.

http://www.ib.edu.ar

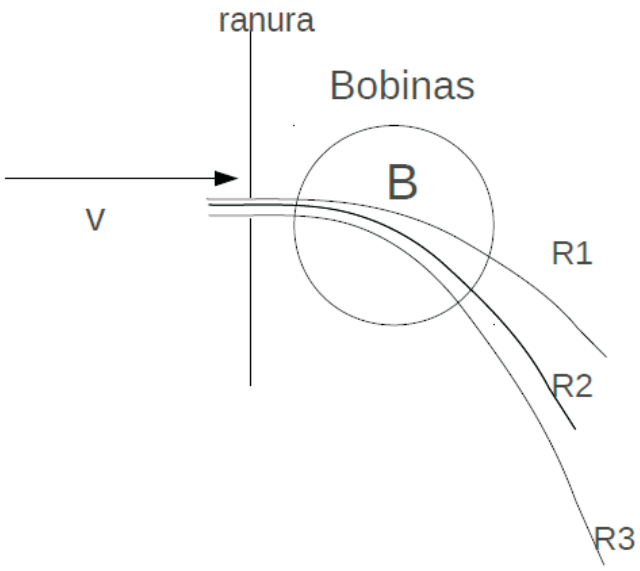
Problema 2, Electricidad y magnetismo

> Un haz iónico está formado por partículas de diferentes masas y cargas eléctricas, todas moviéndose a la misma velocidad. Explicar detalladamente cómo podrían utilizarse dos bobinas eléctricas para separar a las partículas según sus masas y cargas. Detallar las suposiciones realizadas.

Respuesta

Este problema es en cierta forma 'abierto', en el sentido de que no hay una única respuesta correcta y lo importante es el razonamiento empleado y el manejo de los conceptos físicos en la solución.

Lo que se me ocurre a mí es primero 'colimar' el haz lateralmente, es decir restringirlo con algún tipo de rendijas para que quede acotado en una franja estrecha. Después colocaría las dos bobinas, arriba y abajo del haz colimado de manera de generar un campo magnético uniforme perpendicular a la velocidad de las partículas y paralelo a la rendija, como indica el dibujo.



En este caso la fuerza magnética es:

$$F = q.v \times B = qvB \tag{1}$$

(fuerza de Lorentz) donde en el término a la derecha usamos el hecho de que v y B son perpendiculares y donde q es la carga eléctrica. Esta fuerza hace que la partícula describa un movimiento circular, con radio R. Si nos paramos en el sistema no inercial de la partícula, la 'fuerza centrífuga'

$$F_c = \frac{mv^2}{R} \tag{2}$$

del movimiento circular tiene que ser igual a la fuerza de Lorentz,.

Igualando (1) y (2) y despejando R se obtiene:

$$R = \frac{m}{q}\frac{v}{B} \tag{3}$$

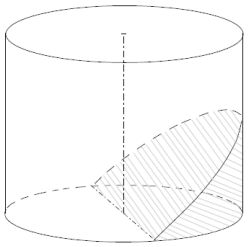
Entonces, partículas de diferente relación carga/masa describen trayectorias de diferente radio. Se pueden poner rendijas que intercepten estas trayectorias y realizar la separación pedida. Este sistema es el empleado en los llamados espectrómetros de masa.

Los efectos de carga y masa son inseparables en esta configuración, y de hecho en muchas otras. Un átomo de helio (masa 4) doblemente ionizado (carga $2e$) es inseparable de uno de deuterio (masa 2) simplemente ionizado (carga e). En general se sabe la carga por otros medios.

http://www.ib.edu.ar

Problema 3, Cálculo integral

Una cuña es cortada de un cilindro circular recto de radio 4 cm, mediante dos planos. Uno de los planos es perpendicular al eje del cilindro. El otro plano interseca al primer plano con un ángulo de 30° a lo largo de un diámetro del cilindro (ver la figura). Encontrar el área de cada una de las tres caras de la cuña.



Respuesta

El área de la base es la mitad del área de un círculo de 4 cm de radio. Esto es:

$$A_{base} = \frac{\pi r^2}{2} = 8\pi \ cm^2$$

El área de la intersección del plano con el cilindro es la mitad del área de una elipse de semieje menor $a = r = 4cm$ y semieje mayor $b = r/\cos 30$. Esto es:

$$A_p = \frac{\pi ab}{2} = \frac{8\pi}{\cos 30} \ cm^2$$

Para calcular el área lateral de la cuña cilíndrica nos conviene utilizar coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$z = z$$

con $r = 4 \ cm = cte$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Para encontrar como varía la variable z, primero tenemos que encontrar la ecuación del plano inclinado a $30°$ que intersecta al cilindro. Para ello determinamos 3 puntos pertenecientes al plano que nos van a permitir encontrar la ecuación del plano. Tomamos dos puntos en el círculo de la base: $(0, -r, 0)$ y $(0, r, 0)$. El tercero lo tomamos sobre la pared del cilindro, donde la variable z se hace máxima: $(r, 0, h)$, donde $h = r\tan 30$. Con esto sacamos que la ecuación del plano es $hx - rz = 0$ y $z = \frac{hx}{r} = z(\theta) = h\cos\theta$.

Para calcular el área de la cuña, planteamos primero el dS en coordenadas cilíndricas para $r = cte$:

$$dS = rdzd\theta$$

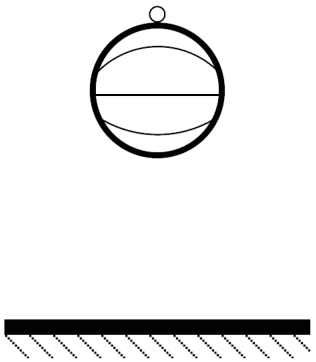
Integrando encontramos que el área de la cuña es:

$$A_c = r\int_{-\pi/2}^{\pi/2} z(\theta)d\theta = 2rh = 32\tan 30 \ cm^2$$

http://www.ib.ed

Problema 4, Mecánica del punto

Tenemos una pelotita de ping-pong apoyada (pero no adherida) a una pelota de básquet, como muestra la figura. Ambas se dejan caer simultáneamente, con velocidad inicial nula. Observamos que, luego del rebote en el piso, la pelotita de ping-pong alcanza una altura H sensiblemente mayor que su altura inicial. Calcular H, suponiendo que la masa de la pelotita de ping-pong es despreciable frente a la de la pelota de básquet, y que todos los choques son elásticos e instantáneos.



Respuesta

Considero un sistema que se desplaza con la pelota grande, después del choque con el suelo. Si llegó al suelo con velocidad V, rebota hacia arriba, después del choque elástico, con velocidad V hacia arriba. Parado en la pelota grande, veo la pelota chica que llega con velocidad V hacia abajo respecto al piso (desde mi sistema fijo a la pelota grande la velocidad de la chica es 2V) y como el choque es elástico, invierte su velocidad y sale hacia arriba con velocidad 2V respecto a la pelota grande.

Una aclaración: la velocidad se invierte exactamente si la masa de la pelotita es cero, si no hay que considerar la conservación de impulso total y da un valor ligeramente menor según la relación de masas. Lo mismo pasa en el rebote con el piso, no consideramos el cambio de velocidad de la tierra.

La velocidad final es 2V para la pelota chica respecto a la grande, pero respecto al piso esto implica que su velocidad es 3 V, ya que el sistema fijo a la pelota grande se mueve a V respecto al piso en ese instante.

Por conservación de energía en la caída: $MgH = 1/2MV^2$, g:aceleracion de la gravedad y H: altura, o sea $V^2 = 2gH$ por lo que H es proporcional aV^2. Ya que la velocidad de la pelotita es 3V respecto al suelo, esto implica que la altura es 9 veces mayor que la de partida.

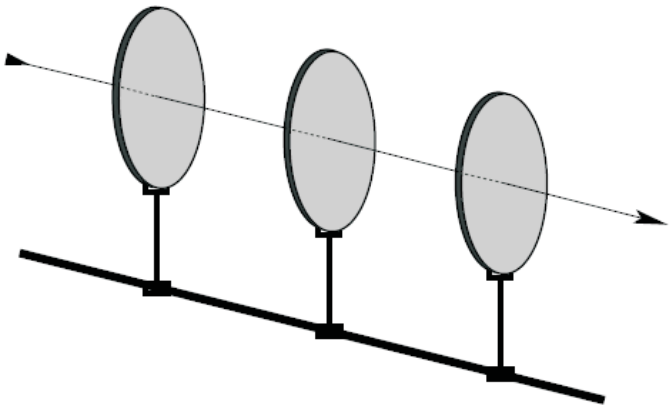
Ojo, que la energía se conserva, lo cual implica que si no despreciamos totalmente la masa de la pelota chica, la pelota grande llega a una altura menor que H.

El problema tiene una solución bastante anti-intuitiva, aunque pensándolo bien respeta todas las leyes de conservación, en particular la de energía.

La razón de porqué la pelotita chica puede subir por encima del punto de partida, es porque se lleva una fracción de la energía que llevaba la pelota grande. Si la masa de la pelotita de ping pong es despreciable, entonces se puede llevar el máximo de energía disponible, y también es despreciable la disminución de energía cinética de la pelota gande.

http://www.ib.edu.ar

Problema 5, Ondas



Un haz de luz no polarizada incide en un arreglo de tres polarizadores lineales ideales, alineados como se muestra en la figura.

1. Si quitamos el polarizador intermedio, la intensidad de luz a la salida es nula. ¿Cuál es la diferencia entre los ángulos de polarización de los polarizadores de entrada y salida?
2. Colocamos ahora el polarizador intermedio, con la posibilidad de cambiar su ángulo de polarización α. El ángulo de los otros dos polarizadores se mantiene fijo. ¿Cuál es la intensidad a la salida del polarizador intermedio en función de α?
3. Si ahora puede variarse el ángulo de los tres polarizadores, ¿cuál es la máxima intensidad que puede transmitirse?

Respuesta

Parte 1)

Los polarizadores tienen los ejes a 90 grados uno del otro. De esta manera la componente linealmente polarizada del primero se encuentra con el otro polarizador, que al tener el eje de trasmisión perpendicular bloquea completamente la componente incidente.

Parte 2)

La intensidad de la luz a la salida del segundo polarizador dependerá del ángulo α entre ambos polarizadores (el primero y el segundo). La intensidad varía como $I_m \cos^2 \alpha$ donde I_m es el máximo de intensidad transmitida que ocurre cuando las direcciones de polarización de ambos polarizadores son paralelas ($\alpha = 0$).

Parte 3)

La mayor intensidad corresponde a poner los tres polarizadores con sus ejes paralelos y corresponde a la intensidad del haz de entrada, con esa polarización.

Problema 6, Ecuaciones lineales

Sea $C \in \mathbb{R}^2$ la curva de ecuación $4(x-1)^2 + 9(y+3)^2 = 36$

1. Esbozar un gráfico de C. ¿Qué tipo de curva es C?
2. Hallar las rectas tangentes a C que pasen por el punto $(x, y) = (1, 1)$. En cada caso, indicar en qué punto de C son tangentes y mostrar la ecuación de la recta.
3. ¿Cómo cambia la respuesta al ítem anterior si el punto $(1, 1)$ se reemplaza por el punto $(2, -3)$?

Respuesta

1. En forma general, una elipse cuyo centro se encuentra en el punto (x_1, y_1) y que tiene semiejes a y b (paralelos a los ejes x e y, respectivamente) se representa con la siguiente ecuación reducida:

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1$$

De manera que si reescribimos la ecuación del problema

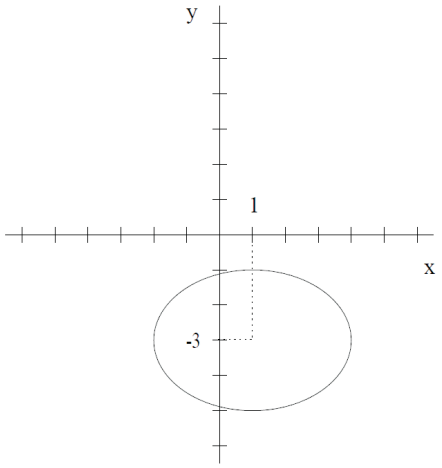
$$4(x-1)^2 + 9(y+3)^2 = 36$$

como

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+3)^2}{2^2} = 1$$

vemos que se trata de una elipse centrada en el punto $(1, -3)$ y que tiene semiejes a y b de longitud 3 y 2, respectivamente.

Con estos parámetros ya se puede esbozar el gráfico, que debería resultar semejante al de la figura.



2. Para hallar las rectas tangentes a la elipse que además pasan por el punto $(1, 1)$, podemos proceder de varias maneras. Describiremos la que parece más básica y que requiere de menos conocimientos.

Por un lado planteamos la ecuación general de una recta

$$y = Ax + B$$

Como sabemos que ambas rectas pasan por el punto $(1, 1)$, podemos despejar uno de los coeficientes

$$B = 1 - A$$

y expresar el otro en términos de las variables

$$A = \frac{y-1}{x-1}$$

Por otro lado, derivando respecto de x la ecuación de la elipse tenemos

$$8(x-1) + 18(y+3)\frac{dy}{dx} = 0$$

o, lo que es lo mismo

$$4(x-1) + 9(y+3)\frac{dy}{dx} = 0$$

pero como la tangente a la elipse $\frac{dy}{dx}$ debe ser igual a la pendiente A de la recta, nos queda

$$4(x-1) + 9(y+3)\frac{y-1}{x-1} = 0$$

o

$$4(x-1)^2 + 9(y+3)(y-1) = 0$$

(x no puede ser igual a 1, se puede ver en la figura)

combinando esta ecuación con la de la elipse resulta

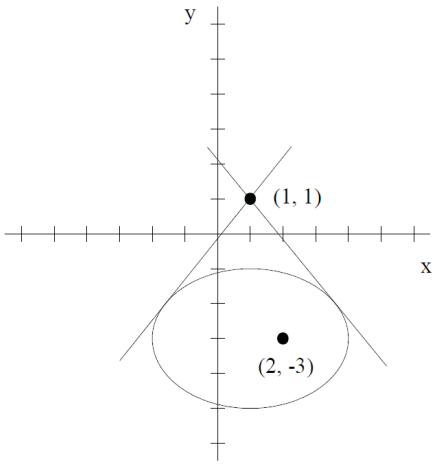
$$9[(y+3)^2 - (y+3)(y-1)] = 36$$
$$9(y+3)[(y+3) - (y-1)] = 36$$
$$y = -2$$

Introduciendo este valor en la ecuación de la elipse obtenemos los valores posibles de la otra coordenada

$$x = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$
$$x = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Finalmente, las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto $(1, 1)$ son

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-1) + 1$$
$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x-1) + 1$$



3. El punto $(2, -3)$ está en el interior de la elipse, de manera que no es posible hallar rectas tangentes a la elipse que pasen por dicho punto.

http://www.ib.edu.ar

Problema 7, Termodinámica

Un cilindro cerrado en ambos extremos está dividido en dos partes iguales, de 50 cm de largo, por un pistón térmicamente aislante. Cada parte contiene en su interior un gas ideal a 1 atm de presión y una temperatura de 27 °C. En esas condiciones, se eleva la temperatura del lado izquierdo hasta alcanzar 100 °C, y luego se inyecta gas a 27 °C al lado derecho, llevando su presión a 2 atm. Considerando que todas las expansiones y compresiones son isotérmicas, ¿cuál es la posición final del pistón respecto del centro del cilindro?

Respuesta

Un primer proceso aumenta la temperatura del recipiente izquierdo hasta 100 °C, por intercambio de calor con los alrededores. Un segundo proceso inyecta gas en el recipiente derecho hasta que la presión es de 2 atm. Por equilibrio del pistón, esta presión también debe manifestarse en el recipiente izquierdo. Durante este segundo proceso, el recipiente izquierdo mantiene su temperatura.

Dada la anterior descripción, el estado final del recipiente izquierdo está caracterizado por una presión de 2 atm y una temperatura de 100 °C. En consecuencia y puesto que conforma un sistema sistema cerrado, tenemos que

$$\frac{p_i\, V_i}{T_i} = \frac{p_f\, V_f}{T_f}, \tag{4}$$

donde los subíndices i y f indican estados inicial y final, respectivamente. Despejando el volumen final (del recipiente izquierdo), obtenemos

$$V_f = \frac{p_i}{p_f}\,\frac{T_f}{T_i}\,V_i. \tag{5}$$

El volumen inicial del recipiente está dado por $V_i = A\, l_i$, donde l_i es la longitud inicial del mismo. Dado que el área no cambia, la anterior ecuación nos determina la longitud final del recipiente izquierdo

$$l_f = \frac{p_i}{p_f}\,\frac{T_f}{T_i}\,l_i = 30{,}773\ \mathrm{cm}. \tag{6}$$

Consecuentemente, la distancia del pistón al centro del cilindro es $50\ \mathrm{cm} - 30{,}773\ \mathrm{cm} = 19{,}227\ \mathrm{cm}$.

http://www.ib.edu.ar

Problema 8, Probabilidad

La probabilidad de que el ómnibus de las 8:00 horas, que viaja de Buenos Aires a Bariloche, parta con m minutos de retraso es $p_m = 3^{-m}$ (m = 1, 2, 3,...;$m \neq 0$). Por cuestiones reglamentarias, la partida nunca se adelanta.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el ómnibus parta a las 8:00?
2. Demostrar que la probabilidad de que el ómnibus parta a las 8:10 es el doble de la probabilidad de que parta después de las 8:10.

Respuesta

Sabemos que el ómnibus sale en algún momento (nunca adelantado), de modo que

$$P(\text{en punto}) + P(\text{atraso}) = 1 \qquad \rightarrow \qquad P(\text{en punto}) = 1 - P(\text{atraso}). \tag{7}$$

La probabilidad de que el ómnibus salga con atraso es

$$P(\text{atraso}) = P(1 \text{ min atraso}) + P(2 \text{ min atraso}) + \ldots = \sum_{m=1}^{\infty} P(\text{m min atraso}). \tag{8}$$

Dado que $P(\text{m min atraso}) = (1/3)^m$, entonces

$$P(\text{atraso}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m. \tag{9}$$

La anterior conforma una serie geométrica, de la cual sabemos que

$$\sum_{m=0}^{n-1} a\, r^m = a\, \frac{1 - r^n}{1 - r}. \tag{10}$$

En particular, la serie infinita converge siempre que $r < 1$, obteniéndose

$$\sum_{m=0}^{\infty} a\, r^m = \frac{a}{1 - r}. \tag{11}$$

Operando, es sencillo ver que $\sum_{m=1}^{\infty} a\, r^m = a\, r/(1 - r)$. En consecuencia, la probabilidad de salir con atraso resulta

$$P(\text{atraso}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{1/3}{1 - 1/3} = 1/2, \tag{12}$$

y, por lo tanto,

$$P(\text{en punto}) = 1 - 1/2 = 1/2. \tag{13}$$

Para responder el segundo punto nos conviene operar con las probabilidades. La probabilidad de que el ómnibus salga después de las 8:10 es

$$P(\text{atraso} > 10) = 1 - P(\text{en punto}) - P(\text{atraso} \leq 10) = 1 - 1/2 - \sum_{m=1}^{10} (1/3)^m. \tag{14}$$

http://www.ib.edu.ar

Utilizando la ecuación (10), tenemos que

$$\sum_{m=0}^{10} r^m = 1 + \sum_{m=1}^{10} r^m = \frac{1-r^{11}}{1-r} \quad \rightarrow \quad \sum_{m=1}^{10} (1/3)^m = \frac{1-(1/3)^{11}}{2/3} - 1. \tag{15}$$

Operando con la expresión anterior

$$\sum_{m=1}^{10} (1/3)^m = \frac{3[1-(1/3)^{11}]-2}{2} = \frac{3-2-(1/3)^{10}}{2} = \frac{1-(1/3)^{10}}{2} \tag{16}$$

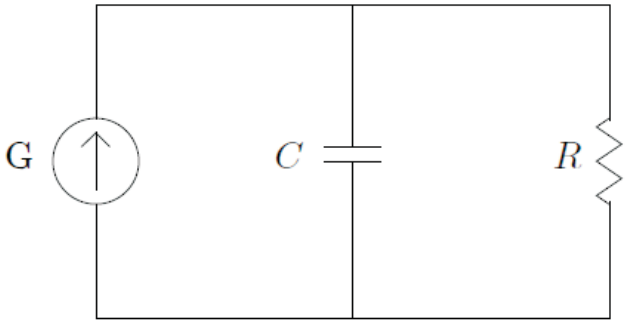
y reemplazándola en la ecuación (14) nos queda

$$P(\text{atraso} > 10) = 1/2 - \frac{1-(1/3)^{10}}{2} = \frac{1}{2}(1/3)^{10} = \frac{1}{2}P(\text{atraso} = 10), \tag{17}$$

con lo cual la probabilidad de salir exactamente a las 8:10 es el doble que la correspondiente a salir en algún momento posterior.

http://www.ib.edu.ar

Problema 9, Electricidad y magnetismo



El circuito de la figura está compuesto por un generador de corriente continua G de resistencia interna despreciable, un capacitor de capacitancia C inicialmente descargado, y un resistor de resistencia R. Cuando está encendido, el generador entrega una corriente continua de valor i_0. Cuando está apagado, la corriente por la rama que contiene al generador es nula.

1. En un primer experimento, el generador de corriente se enciende a $t = 0$ y se mantiene encendido. Calcular y graficar, como función del tiempo, la carga en el capacitor y la corriente que circula por cada rama del circuito.

2. En un segundo experimento, con el capacitor nuevamente descargado, el generador de corriente se enciende y, transcurrido un tiempo $T = RC \ln 2$, se apaga. Calcular y graficar, como función del tiempo, la carga en el capacitor y la corriente que circula por cada rama del circuito. ¿Cuál es el calor total disipado en el resistor durante el intervalo $0 \leq t \leq 2T$?

Respuesta

Las variables de este problema son: el tiempo, la carga del capacitor $q(t)$, la corrientes que circulan por el resistor y por el capacitor, $i_R(t)$ y $i_C(t)$, y la tensión en bornes de los dos componentes que, como están en paralelo, son iguales y llamaremos $V(t)$.

Dado que el capacitor está inicialmente descargado ($q(0) = 0$), la tensión entre sus placas es cero ($V(0) = 0$). Esto implica que la corriente $i_R(0)$ es nula (Ley de Ohm). Es decir que en ese primer instante toda la corriente que provee la fuente circula por el capacitor, $i_C(0) = i_0$. A medida que éste se carga, $V(t)$ aumenta y en consecuencia $i_R(t)$ también.

1. Para obtener las expresiones de $q(t)$ y $i_C(t)$, partimos de la ecuación diferencial que surge de igualar las tensiones en bornes de R y C

$$i_R(t)R = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')dt'$$

Como $i_0 = i_R(t) + i_C(t)$ (Ley de Kirchhoff de corrientes), podemos reescribir la ecuación anterior en función de $i_C(t)$

$$(i_0 - i_C(t))R = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')dt'$$

Derivando respecto de t tenemos

$$\frac{di_C(t)}{dt} = -\frac{i_C(t)}{RC}$$

Esto tiene una solución del tipo

$$i_C(t) = i_C(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

o, por lo escrito anteriormente,

$$i_C(t) = i_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

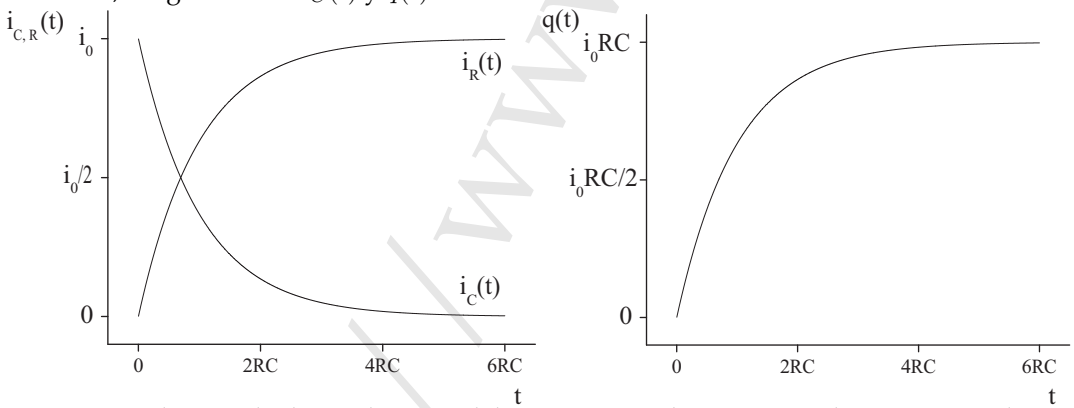
La corriente que pasa por el resistor es, entonces

$$i_R(t) = i_0 - i_C(t) = i_0 - i_0 e^{-\frac{t}{RC}} = i_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

La carga del capacitor se puede calcular fácilmente a partir de la tensión en sus bornes (también se podría integrar la corriente en el tiempo, es un camino un poco más laborioso)

$$q(t) = V(t)C = i_R(t)RC = i_0 RC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

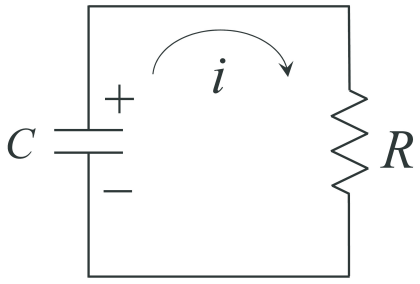
Entonces, los gráficos de $i_C(t)$ y $q(t)$ resultan



2. En primer lugar calculamos la carga del capacitor en el instante en el que se apaga la fuente ($t = T = RCln2$)

$$q(T) = \frac{i_0 RC}{2}$$

Como el generador está apagado y la corriente por esa rama es nula, podemos dibujar el circuito de la siguiente manera



http://www.ib.edu.ar

A fin de simplificar las cuentas, redefinimos la variable de tiempo de manera que empezamos de cero en el momento en que se apaga el generador ($q(0) = i_0 RC/2$). En este caso existe una sola corriente $i(t)$ que circula por ambos componentes. Para encontrar una expresión que describa su evolución temporal, repetimos el método utilizado en el punto anterior.

$$V_R(t) = V_C(t)$$

$$i(t)R = V_C(0) - \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{i(t)}{RC}$$

La solución es, como antes

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

El valor inicial de la corriente se puede calcular a partir de la tensión en bornes del capacitor

$$i(0) = \frac{V_C(0)}{R} = \frac{q(0)}{RC} = \frac{i_0}{2}$$

Si el cálculo estuviera bien hecho, este valor tendría que coincidir con el que se obtiene de evaluar la expresión de $i_R(t)$ del punto 1 en $t = RCln2$. Felizmente coincide.

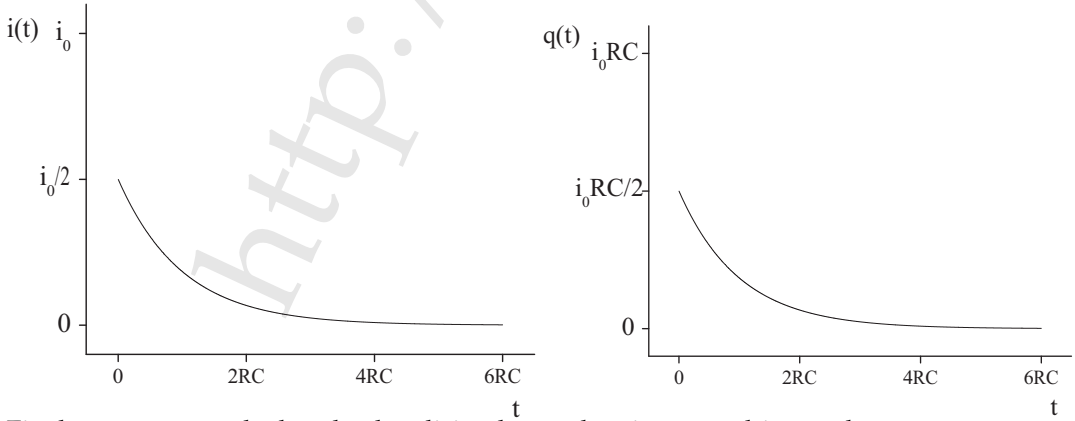
Entonces, la corriente en función del tiempo resulta

$$i(t) = \frac{i_0}{2}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Nuevamente, la carga del capacitor se obtiene de la tensión en sus bornes, que es la misma que existe en bornes del resistor

$$q(t) = V_C(t)C = V_R(t)C = i(t)RC = \frac{i_0}{2}RCe^{-\frac{t}{RC}}$$

Los gráficos correspondientes son los siguientes (recordemos que redefinimos el origen de la escala de tiempo)



Finalmente, para calcular el calor disipado en el resistor en el intervalo $0 \leq t \leq 2T$ consideramos por separado la etapa de carga del capacitor (con el generador encendido) y la etapa de descarga.

En la primera etapa, integramos la potencia instantánea $i_R(t)^2 R$ entre 0 y $T = RCln2$

http://www.ib.edu.ar

$$Q_1 = \int_0^T i_R(t)^2 R dt = i_0^2 R \int_0^T (1 - e^{-\frac{t}{RC}})^2 dt = (ln2 - \frac{5}{8})(i_0 R)^2 C$$

En la segunda, entre T y $2T$ (teniendo en cuenta el cambio de escala temporal)

$$Q_2 = \int_0^T i_R(t)^2 R dt = i_0^2 R \int_0^T e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{3}{8}(i_0 R)^2 C$$

De manera que el calor disipado es

$$Q = Q_1 + Q_2 = (ln2 - \frac{1}{4})(i_0 R)^2 C$$

http://www.ib.edu.ar

Problema 10, Multiplicadores de Lagrange

Se definen

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{2}{75}x_3^3$$

y

$$R = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

1. Hallar todos los extremos relativos de f restringida a R.
2. Clasificar los extremos hallados en el punto anterior como máximo o mínimo, según corresponda.
3. ¿Hay máximos o mínimos absolutos de f restringida a R?

Respuesta

1) Cuando tenemos que encontrar los extremos de una función restringida se usa el método de los multiplicadores de Lagrange. En este caso tenemos la función:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{2}{75}x_3^3$$

restringida a R que es el plano que sale de resolver el determinante:

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$f|_R$ tiene máximo o mínimo local en R en el punto (x_1, x_2, x_3) si existe un λ real tal que:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \lambda \nabla g(x_1, x_2, x_3)$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = \lambda$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \quad \Rightarrow \quad 2x_2 = -2\lambda$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{25}x_3^2 = \lambda$$

y reemplazando esos valores en $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ obtenemos los valores $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$. Los puntos probables en los que hay un extremo son entonces: (0,0,0), (1,-2,5) y (1,-2,-5). Vemos que el punto (1,-2,5) no pertenece al plano descripto por la ecuación $g(x_1, x_2, x_3)$ y por lo tanto no es un posible extremo.

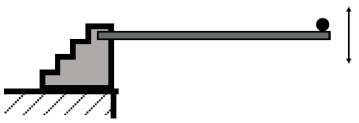
2) Aplicando los criterios para máximos y mínimos encontramos que en el punto (0,0,0) tenemos un mínimo local y en el punto (1,-2,-5) un máximo local.

3) Estos extremos no son absolutos porque la restricción no es una región cerrada y acotada.

http://www.ib.edu.ar

Problema 11, Mecánica del punto

Una piedra pequeña está apoyada en el extremo libre de la tabla de un trampolín, como muestra la figura. Se observa que cuando la tabla oscila con amplitud pequeña la piedra siempre se mantiene en contacto con la tabla. Por otro lado, cuando la oscilación es de amplitud mayor, la piedra pierde contacto con la tabla. Haciendo las suposiciones que se consideren apropiadas, explicar este cambio en el comportamiento del movimiento de la piedra.



Respuesta

Supongamos que la piedra es muy pequeña, de modo que no altere el movimiento de la tabla. Esto es, la tabla ejerce una acción sobre la piedra que resulta fundamental para la descripción de su estado; sin embargo, la reacción sobre la tabla representa una contribución menor dentro de las que generan la dinámica de oscilación de la misma. En este caso, el extremo de la tabla puede describirse independientemente de lo que sucede con la piedra; en particular y dado el enunciado, el extremo mantendrá un movimiento oscilatorio que, por simplicidad, lo suponemos sinusoidal:

$$z(t) = A\,\sin(\omega\,t). \tag{18}$$

Este movimiento oscilatorio no tiene amortiguación, lo cual resulta una simplificación válida pues la amortiguación se observa al cabo de algunos ciclos mientras que nosotros estamos interesados en lo que sucede dentro de uno sólo de ellos.

A partir del movimiento del extremo, podemos caracterizar la velocidad y la aceleración del mismo (correspondiente también a las de la piedra, en el caso de que mantenga el contacto). En particular, la aceleración resulta

$$\ddot{z}(t) = -A\,\omega^2\,\sin(\omega\,t). \tag{19}$$

La piedra puede tener cualquier aceleración para arriba, pues esto sólo requeriría que la tabla ejerza una fuerza normal adecuada hacia arriba. Sin embargo, la piedra no puede tener cualquier aceleración para abajo: a partir del momento en que la aceleración del extremo es $-g$ (o, correspondientemente, la normal sobre la piedra igual a 0), la piedra pierde el contacto y comienza una caída libre (hasta volver a encontrarse con la tabla). En consecuencia, en base a la expresión anterior para la aceleración del extremo, podemos decir que:

- Si $A\,\omega^2 < g$, la piedra mantiene el contacto siempre.
- Si $A\,\omega^2 > g$, la piedra en algún momento pierde el contacto.

El caso $A\,\omega^2 = g$ corresponde a que la normal ejercida por la tabla sobre la piedra se hace cero (y por ello, la acelaración de la piedra es exactamente $-g$) en un sólo punto, correspondiente al cenit de la trayectoria. En los casos $A\,\omega^2 > g$ la separación ocurre antes: A partir de la ecuación para la aceleración dada más arriba, es fácil obtener cuánto debe valer $\sin(\omega\,t)$ para igualar a $-g$. A partir de ello y utilizando la primera ecuación, se sabrá a

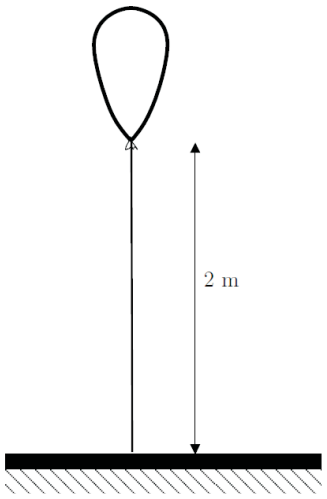
qué altura se desprende.

Dado que la frecuencia de oscilación dependerá de la composición de la tabla y las condiciones de su apoyo, el único parámetro accesible para nosotros resulta la amplitud A. Aumentando esta cantidad podemos pasar de una situación con contacto permanente, $A < g/\omega^2$, a una situación con desprendimiento, $A > g/\omega^2$.

http://www.ib.edu.ar

Problema 12, Hidrostática e Hidrodinámica

En la habitación de Arielito hay un globo lleno de helio, con un cordel que llega hasta el suelo. Según pasa el tiempo, el globo desciende paulatinamente por pérdida de gas, haciendo que el cordel se apoye de a poco sobre el piso de la habitación. Debido a que el descenso es muy lento, puede suponerse que en cada momento el globo se encuentra en equilibrio hidrostático. La densidad del He es $0,18kg/m^3$, la del aire es $1,29kg/m^3$, la masa del globo desinflado es $0,005kg$, la densidad lineal de masa del cordel es $0,005kg/m$ y la altura inicial del extremo inferior del globo es de $2m$. La densidad de los gases dentro y fuera del globo se mantienen siempre constantes.



1. Calcular el volumen inicial del globo.
2. Describir el movimiento vertical del globo suponiendo que la pérdida de gas es tal que, en cada momento, la tasa de disminución del volumen del globo es proporcional al propio volumen.

Respuesta

1) Al principio tenemos el cordel justo tocando el suelo como muestra la figura. Las fuerzas que actúan son: el empuje E hacia arriba (dado por el peso del aire desalojado por el globo) y 3 fuerzas peso hacia abajo: P_C dada por el peso del cordel, P_{He} dada por el peso del helio contenido dentro del globo y P_G dada por el peso del globo en sí (usando la masa del globo desinflado). Como están en equilibrio tenemos:

$$E - P_C - P_{He} - P_G = 0$$

Cada una de estas fuerzas se puede expresar:

$$E = \rho_{aire}\, V_0\, g$$
$$P_C = \lambda_{cordel}\, l\, g$$
$$P_{He} = \rho_{He}\, V_0\, g$$
$$P_G = m_G\, g$$

Reemplazando estas expresiones en la condición de equilibrio podemos despejar el volumen inicial del globo que es $V_0 = 0{,}0135\ m^3$.

2) Sabemos que la pérdida de gas es tal que la disminución del volumen con el tiempo es proporcional al volumen. Matemáticamente esto es:

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha\, V \quad \Rightarrow \quad \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{dt} = -\alpha \int_0^t dt$$

http://www.

Integrando queda:

$$\ln(V/V_0) = -\alpha\, t$$

y despejando:

$$V = V_0\, e^{-\alpha t}$$

Por otro lado, a medida que el globo desciende el cordel se va apoyando en el piso y su peso P_C va disminuyendo:

$$m_{cordel} = \lambda_{cordel}\ (l - x)$$

donde x representa la distancia vertical que descendió el globo. Como está siempre en equilibrio hidrostático se cumple la relación:

$$E - P_C - P_{He} - P_G = 0$$

Para un cierto volumen $V = V_0\, e^{-\alpha t}$ la expresión será:

$$(\rho_{aire} - \rho_{He})V_0 e^{-\alpha t} - \lambda_{cordel}(l - x) - m_G = 0$$

Y ahora podemos describir el movimiento del globo a través de la variable x y su variación en función del tiempo t:

$$x = 3(1 - e^{-\alpha t})$$

http://www.ib.edu.ar