Índice general

Examen de Física y Matemática, 2010

Problema 1. Mecánica del punto

Una partícula de masa $m_1 = 0{,}2$ kg y carga eléctrica positiva $q_1 = 0{,}5$ C se suelta desde una altura de $z = 0{,}25$ m sobre el piso, en presencia de la gravedad ($g = 9{,}8$ m/s^2) y de un campo eléctrico uniforme y constante, de módulo $E = 4$ N/C, dirección vertical y sentido hacia arriba. Simultáneamente, se lanza desde el piso y hacia arriba una segunda partícula, de masa $m_2 = 0{,}5$ kg y sin carga eléctrica, con velocidad inicial $v_2 = 3$ m/s.
Suponiendo que no hay rozamiento y que las partículas no chocan entre sí, ¿a qué tiempo se encuentran a la misma altura sobre el piso? ¿Cuál es esa altura?

Respuesta

En primer lugar definimos un sistema de coordenadas. En forma arbitraria, pero aparentemente natural, elegimos uno con origen en el suelo y sentido positivo hacia arriba.

Ahora tenemos que identificar cuáles son las fuerzas que actúan sobre cada partícula, a fin de calcular las respectivas aceleraciones.

La partícula 2 no tiene carga y es sólo afectada por la gravedad, por lo que su ecuación de movimiento es

$$x_2 = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1}$$

La partícula 1 tiene una carga q_1 y además una masa m_1. La fuerza que actúa sobre ella es, entonces

$$F_1 = q_1 E - m_1 g$$

de manera que

$$a_1 = \frac{F_1}{m_1} = \frac{q_1 E}{m_1} - g$$

y, en consecuencia

$$x_1 = z + \frac{1}{2}\left(\frac{q_1 E}{m_1} - g\right) t^2. \tag{2}$$

Igualando las ecuaciones de movimiento (1) y (2)

$$v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 = z + \frac{1}{2}\left(\frac{q_1 E}{m_1} - g\right) t^2$$

obtenemos la ecuación cuadrática

$$\frac{1}{2}\frac{q_1 E}{m_1} t^2 - v_2 t + z = 0$$

cuyas raíces son los tiempos correspondientes a los encuentros entre las partículas

$$t = \frac{m_1}{q_1 E}\left(v_2 \pm \sqrt{v_2^2 - 2\frac{q_1 E z}{m_1}}\right)$$

que, con los valores numéricos del enunciado, resultan

$$t = 0,1 \text{ s y } t = 0,5 \text{ s.}$$

Finalmente, reemplazando estos tiempos en cualquiera de las ecuaciones de movimiento, calculamos las alturas a las que se encuentran las partículas.

$$x_1 = x_2 = 0{,}275 \text{ m}$$

y

$$x_1 = x_2 = 0{,}251 \text{ m}.$$

Problema 2. Ecuaciones lineales

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -x_3 & & +x_5 & = y_1 \\ 2x_1 & -2x_2 & & +x_4 & -x_5 & = y_2 \\ x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & +4x_5 & = y_3 \\ & 5x_2 & +x_3 & +x_4 & +6x_5 & = y_4 \end{cases}$$

a) Determinar qué condiciones deben satisfacer los parámetros $y_1, \ldots, y_4$ a fin de que el mismo tenga solución para las variables $x_1, \ldots, x_5$.
b) En las condiciones del punto anterior, ¿cuántas soluciones tiene el sistema?
c) Determinar las soluciones para el caso en que $y_1 = -8$, $y_2 = 9$, $y_3 = 12$, $y_4 = -5$.

Respuesta

Se trata de un sistema no homogéneo de 4 ecuaciones lineales con 5 incógnitas. Por inspección, vemos que si tomamos la diferencia entre la primera y la segunda ecuación, y entre la cuarta y la tercera, obtenemos lo mismo en el lado izquierdo de la igualdad:

$$-x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = y_1 - y_2$$

$$-x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = y_4 - y_3$$

Por lo tanto, para que el sistema tenga solución, es necesario que

$$y_1 - y_2 = y_4 - y_3$$

Formalmente, puede utilizarse el método de reducción de filas (o método de Gauss): primero escribimos la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & y_1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & -1 & y_2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & y_3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 6 & y_4 \end{array}\right)$$

Al efectuar las siguientes "operaciones elementales":

- intercambio de dos filas,
- multiplicación de una fila por un escalar distinto de cero,
- suma de dos filas,

el sistema que se obtiene es equivalente al sistema original, ya que todas estas operaciones son reversibles.

Así, por ejemplo, si reemplazamos la segunda fila por 2 veces la primera menos la segunda, obtenemos: $(0, 8, -2, -1, 3, 2y_1 - y_2)$. Procediendo en forma análoga para la tercera y cuarta fila, resulta

$$\left(\begin{array}{ccccc|l} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 8 & -2 & -1 & 3 & 2y_1 - y_2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & -3 & y_1 - y_3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 6 & y_4 \end{array}\right)$$

Repitiendo este proceso hasta obtener una matriz que tenga ceros en todos los sitios debajo de la diagonal, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccccc|l} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 8 & -2 & -1 & 3 & 2y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 18 & 13 & 33 & -2y_1 - 3y_2 + 8y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8y_1 - 8y_2 + 8y_3 - 8y_4 \end{array}\right)$$

de donde deducimos que, para que el sistema tenga solución, es necesario que $y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0$. Cuando se cumple esta condición, nuestro sistema es equivalente a uno de 3 ecuaciones con 5 incógnitas, que posee infinitas soluciones.

El caso particular $y_1 = -8$, $y_2 = 9$, $y_3 = 12$, $y_4 = -5$ satisface la condición anterior, por lo tanto el sistema resultante tiene infinitas soluciones. Podemos despejar x_1, x_2 y x_3 en función de x_4 y x_5 del sistema:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = -8$$

$$8x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = -25$$

$$18x_3 + 13x_4 + 33x_5 = 85$$

La solución estará dada por una solución general de la ecuación homogénea más una solución particular.

Para encontrar una solución particular, elijamos por ejemplo $x_4 = 1$ y $x_5 = 0$, con lo que, despejando, se obtiene: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, -2, 4, 1, 0)$

Para resolver el sistema homogéneo:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 0$$

$$8x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$$

$$18x_3 + 13x_4 + 33x_5 = 0$$

tomemos en primer lugar $x_4 = 1$ y $x_5 = 0$, y obtenemos:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\frac{5}{9}, -\frac{1}{18}, -\frac{13}{18}, 1, 0)$$

y luego $x_4 = 0$ y $x_5 = 1$, para obtener:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\frac{1}{3}, -\frac{15}{18}, -\frac{33}{18}, 0, 1)$$

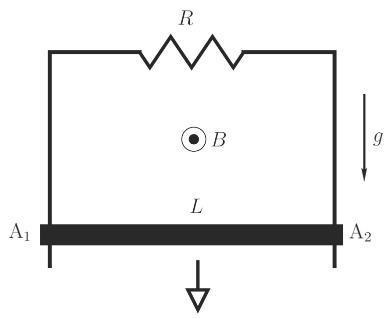
Por lo tanto la solución más general será:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, -2, 4, 1, 0) + A(-\frac{5}{9}, -\frac{1}{18}, -\frac{13}{18}, 1, 0) + B(-\frac{1}{3}, -\frac{15}{18}, -\frac{33}{18}, 0, 1)$$

con A y B coeficientes reales arbitrarios.

Problema 3. Electromagnetismo

Una barra metálica de largo L, masa M y resistencia eléctrica despreciable cae por efecto de la gravedad, deslizando sin rozamiento sobre las ramas paralelas de un circuito conductor con el que hace contacto en los puntos A_1 y A_2, y manteniéndose siempre en posición horizontal, como se esquematiza en la figura. El circuito tiene resistencia eléctrica R. Todo el sistema está inmerso en un campo magnético uniforme y constante de módulo B, con orientación perpendicular al plano del circuito.
a) Demostrar que, para tiempos asintóticamente largos, la velocidad de caída de la barra alcanza un límite.
b) Calcular la potencia disipada en el circuito en esa condición límite.



Respuesta

Definimos como x la coordenada que determina la posición de la barra en su caída, con valores positivos hacia abajo. Luego identificamos las fuerzas que actúan sobre ella. Por un lado tenemos la gravedad, que proporciona un término $F_g = Mg$, y por el otro una fuerza F_m debida a la interacción entre el campo B y la corriente que se induce en la barra

$$\vec{F_m} = i\vec{L} \times \vec{B} \qquad \rightarrow \qquad F_m = -iLB$$

donde i es la corriente (que en este caso circula en sentido horario), y se puede calcular a partir de la fuerza electromotriz inducida ξ usando la expresión

$$i = \frac{\xi}{R} = L\frac{dx}{dt}\frac{B}{R}.$$

Intentemos resolver el problema de una manera conceptual. Tenemos dos fuerzas que se oponen: una gravitatoria constante hacia abajo F_g, y otra que inicialmente es nula (si suponemos la velocidad inicial igual a cero) y que aumenta a medida que la barra se acelera durante la caída (F_m). Entonces, la aceleración de la barra tendrá un valor positivo hasta que F_m sea igual en magnitud a F_g. A partir de ese momento no habrá más fuerzas actuando sobre la barra y, en consecuencia, su velocidad se mantendrá constante.

Esto mismo, descripto en forma matemática es

$$F_g + F_m = 0 \qquad \rightarrow \qquad Mg = \frac{(LB)^2}{R}\frac{dx}{dt}$$

de manera que la velocidad límite resulta

$$\frac{dx}{dt} = Mg\frac{R}{(LB)^2}.$$

Para obtener la potencia disipada (inciso b) alcanza con reemplazar el valor de la velocidad calculada en la expresión de la corriente que circula por el circuito y usar una de las fórmulas de la potencia

$$i = L\frac{dx}{dt}\frac{B}{R} = \frac{Mg}{LB} \qquad \rightarrow \qquad P = i^2 R = \left(\frac{Mg}{LB}\right)^2 R.$$

Si el razonamiento anterior no nos convence, podemos resolver la ecuación diferencial

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_g + F_m = Mg - \frac{(LB)^2}{R}\frac{dx}{dt}$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(LB)^2}{R}\frac{dx}{dt} = Mg$$

o, escrito de otra manera (c_i son constantes)

$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{dx}{dt} + \frac{(LB)^2}{R}x\right) = Mg$$

$$M\frac{dx}{dt} + \frac{(LB)^2}{R}x = Mgt + c_1. \tag{3}$$

Resolvemos primero la ecuación homogénea

$$M\frac{dx}{dt} + \frac{(LB)^2}{R}x = 0$$

planteando soluciones del tipo

$$x_{hom} = c_2 e^{c_3 t}$$

que resultan

$$x_{hom} = c_2 e^{-\frac{(LB)^2}{MR}t}.$$

A tiempos asintóticamente largos esta solución tiende a cero y, consecuentemente, su velocidad también.

Ahora proponemos una solución particular de la ecuación inhomogénea

$$x_{part} = c_4 + c_5 t$$

de manera que la ecuación (3) resulta

$$Mc_5 + \frac{(LB)^2}{R}(c_4 + c_5 t) = Mgt + c_1$$

y, entonces, igualando término a término

$$Mc_5 + \frac{(LB)^2}{R}c_4 = c_1$$

$$\frac{(LB)^2}{R}c_5 = Mg.$$

La constante c_5, que casualmente es la velocidad correspondiente a la solución particular, resulta

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{part} = c_5 = Mg\frac{R}{(LB)^2}.$$

La solución general es la solución de la ecuación homogénea x_{hom} más la solución particular x_{part}. Por lo tanto, la velocidad es también la suma de las velocidades que se obtienen en cada caso.

$$\frac{dx}{dt} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{hom} + \left.\frac{dx}{dt}\right|_{part}$$

Como vimos que a tiempos largos $\frac{dx}{dt}|_{hom}$ tiende a cero, sólo nos queda

$$\frac{dx}{dt} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{part} = Mg\frac{R}{(LB)^2}$$

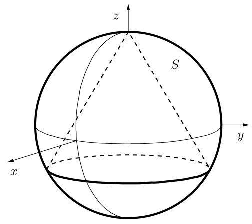
que es una constante. Es decir, la velocidad alcanza ese valor límite, lo que responde el inciso a en una manera probablemente más rigurosa pero claramente más larga.

Problema 4. Integrales de volumen

Del interior de una esfera de radio R, centrada en el origen, se elimina un volumen cónico de altura $\frac{3}{2}R$, con vértice en el punto más alto de la esfera y base horizontal con borde contenido en la superficie de la esfera. Denotamos por S al sólido resultante. La densidad de masa en cada punto de S está dada por

$$\delta(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2),$$

donde a es un coeficiente constante. Calcular la masa de S.



Respuesta

La masa del sólido está dada por

$$M = \int \delta(x, y, z)\ dV.$$

En lugar de calcular la integral anterior, pensemos en la siguiente situación. Supongamos que la expresión para la densidad se extiende a todo $\mathcal{R}^3$. Entonces, la masa de la esfera es

$$M_e = \int_{\mathcal{D}_e} \delta(x, y, z)\ dV.$$

El dominio de integración de la esfera puede descomponerse en dos dominios disjuntos: el volumen correspondiente al cono, $\mathcal{D}_c$, y el volumen correspondiente al sólido planteado en el enunciado, $\mathcal{D}_s$. Por lo tanto,

$$M_e = \int_{\mathcal{D}_c} \delta(x, y, z)\ dV + \int_{\mathcal{D}_s} \delta(x, y, z)\ dV.$$

De este modo

$$M_s = M_e - M_c,$$

donde

$$M_e = \int_{\mathcal{D}_e} \delta(x, y, z)\ dV$$

$$M_c = \int_{\mathcal{D}_c} \delta(x, y, z)\ dV.$$

Para calcular la integral en la región delimitada por la esfera conviene pasar a coordenadas esféricas. Recordando que $dV = dx\ dy\ dz = r^2\ \sin(\theta)\ d\phi\ d\theta\ dr$. En este caso,

$$M_e = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^{R} r^2\ dr\ \delta(r, \theta, \phi).$$

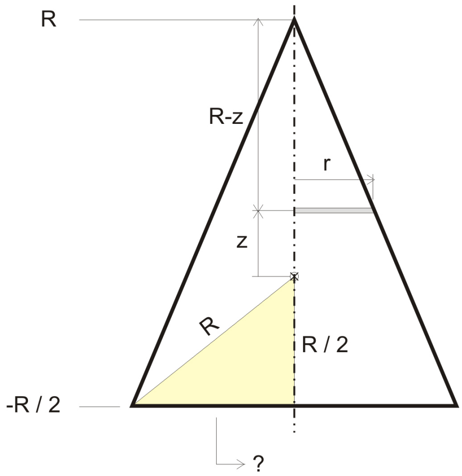
Reemplazando la densidad expresada en coordenadas esféricas $\delta(r, \theta, \phi) = a\, r^2$, la integral anterior es

$$M_e = \frac{4\pi}{5}\ a\ R^5.$$

Para calcular la integral en la región dada por el cono conviene pasar a coordenadas cilíndricas. En este caso, el diferencial de volumen corresponde a $dV = dx\, dy\, dz = r\, d\phi\, dr\, dz$. Así,

$$M_c = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-R/2}^{R} dz \int_0^{\frac{R-z}{\sqrt{3}}} r\ dr\ \delta(r, \phi, z).$$

Dado que existe simetría de rotación, para identificar los límites de integración basta con observar la siguiente figura bidimensional:



Por Pitágoras, el radio de la base circular del cono es igual a $R_c = \sqrt{3}R/2$. De la relación de proporcionalidad

$$\frac{Radio}{Altura} = \frac{\sqrt{3}R/2}{3R/2} = \frac{r}{R-z}$$

obtenemos que para un dado z, r debe integrar desde 0 hasta $\frac{R-z}{\sqrt{3}}$. Obviamente, cada uno de los volúmenes se obtiene integrando ϕ de 0 a 2π y z de $-R/2$ a R.

La densidad en coordenadas cilíndricas es $\delta(r, \phi, z) = a(r^2 + z^2)$. Reemplazando esta expresión en la anterior fórmula e integrando (desarrollar en polinomios para integrar en z) obtenemos

$$M_c = \frac{39\pi}{320}\ a\ R^5.$$

En consecuencia, la masa del sólido es

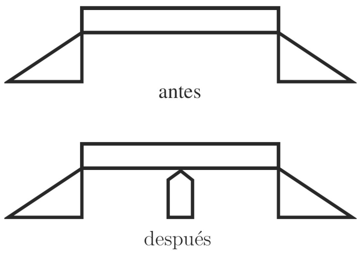
$$M_s = \left(\frac{4}{5} - \frac{39}{320}\right)\ \pi\ a\ R^5 = \frac{217\pi}{320}\ a\ R^5.$$

Problema 5. Ondas

Durante un terremoto, el puente de la figura de arriba entra en resonancia y oscila con una frecuencia de 4Hz. Vialidad Nacional decide agregar un pilar en el centro del puente, como se muestra en la figura de abajo.

a)¿Cómo se modifica la frecuencia de resonancia del puente?

b) Si los terremotos generan oscilaciones con una frecuencia máxima de 6Hz, ¿mejoró la situación del puente al agregar el pilar?



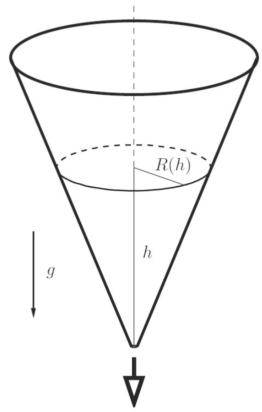
Respuesta

Para resolver este problema alcanza con saber que, al igual que una cuerda de guitarra, el puente tiene frecuecias de resonancia naturales que dependen de la distancia a la que se encuentran sus nodos. La magnitud de estas frecuencias de resonancia es inversamente proporcional a la distancia entre los puntos fijos.

Al agregar el pilar se reduce la distancia entre nodos a la mitad y, en consecuencia, se duplica la frecuencia fundamental (la frecuencia de resonancia más baja). Es decir que ahora las frecuencias de resonancia del puente serán mayores que 8Hz y, por lo tanto, terremotos de frecuencias máximas de 6Hz no lo afectarán.

Problema 6. Mecánica de los fluidos

En el recipiente con forma de cono invertido mostrado en la figura, el radio R de la sección transversal depende de la altura h según $R(h) = h/2$. En el vértice del cono hay un agujero de radio $r = 0{,}001$ m. El recipiente está lleno de agua hasta una altura de 0,2 m. La aceleración de la gravedad es $g = 9{,}8 \mathrm{m/s}^2$. Despreciando efectos de viscosidad y vorticidad, y suponiendo que la superficie del agua desciende muy lentamente, determinar en cuánto tiempo se descarga el recipiente.



Respuesta

Según Bernoulli, el comportamiento de un fluido como el que estamos considerando, sin viscosidad ni vorticidad, se puede describir con la siguiente ecuación

$$\frac{v^2\rho}{2} + p + \rho g h = cte$$

donde ρ es la densidad, v la velocidad y p la presión de la porción de fluido en estudio.

En particular, en la superficie del agua tenemos que la altura del agua es h y su velocidad es aproximadamente nula (según el enunciado del problema). En el vértice del cono el agua sale con una velocidad v a una altura igual a cero (despreciando la altura del agujero). Podemos olvidarnos de la presión, dado que es la misma en los dos puntos considerados, y de la densidad, que es constante en todo el fluido. Entonces, la ecuación de Bernoulli se reduce a la siguiente expresión

$$v^2 = 2gh. \tag{4}$$

Por otro lado, sabemos que el volumen V de un cono de altura h y base de radio R es

$$V = \frac{\pi R^2}{3} h$$

y en este caso, como $R(h) = h/2$

$$V = \frac{\pi}{12} h^3$$

por lo que un diferencial de altura está relacionado con un diferencial de volumen según

$$dV = \frac{\pi}{4} h^2 dh. \tag{5}$$

En el vértice del cono, tenemos que

$$dV = \pi r^2 v dt. \tag{6}$$

Igualando las ecuaciones (5) y (6), y reemplanzando v por la expresión que se deduce de la ecuación (4) obtenemos

$$\frac{h^2}{4\sqrt{2gh}} dh = r^2 dt.$$

Para obtener el tiempo que tarda en descargarse el recipiente, integramos la expresión anterior entre la altura inicial h_i y la final (h=0) de un lado, y entre cero y el tiempo final t_f del otro

$$\int_{h_i}^{0} \frac{h^2}{4\sqrt{2gh}} dh = \int_{0}^{t_f} r^2 dt$$

lo que nos da como resultado

$$t_f = \frac{h_0^{5/2}}{10\sqrt{2g}r^2}$$

que es de aproximadamente 400 s.

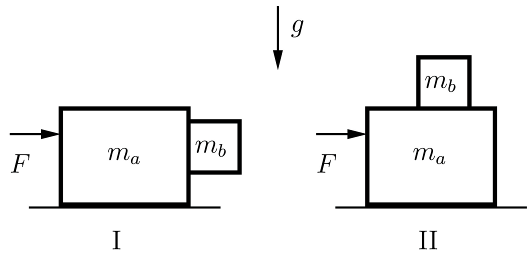
En la resolución de este problema se consideró que la velocidad del fluido es nula en la superficie del mismo. Esta aproximación pierde validez cuando h se hace muy pequeña, comparable a r. De todas maneras, como la altura inicial del agua es mucho mayor que el diámetro del orificio, el cálculo del tiempo total que tarda en vaciarse el recipiente no se ve mayormente afectado por dicha aproximación.

Problema 7. Mecánica del punto

Dos bloques de masas m_a y m_b, con coeficiente de rozamiento estático μ entre ellos, se disponen como muestra la figura (casos I y II). No hay rozamiento con el piso. Sobre el bloque más grande se aplica una fuerza de dirección horizontal y módulo F.

a) Para cada caso, hacer un esquema de las fuerzas que actúan sobre el bloque más pequeño.

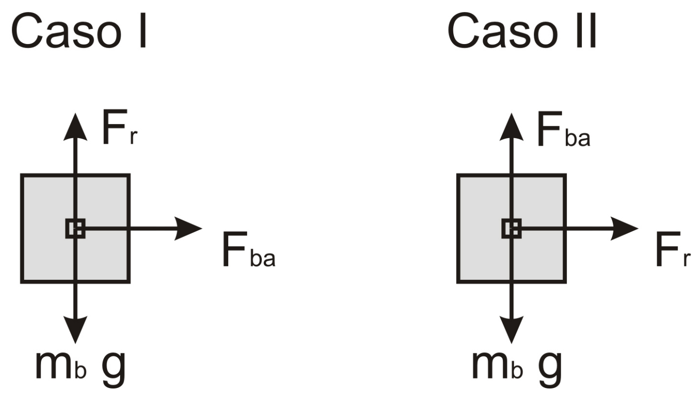
b) ¿Qué condición debe cumplir F en cada caso para que los bloques no se desplacen uno respecto del otro?



Respuesta

Dada la ausencia de datos geométricos, el tratamiento del problema se basa en mecánica del punto (ausencia de torque).

El diagrama de las fuerzas actuantes sobre el bloque más pequeño, para ambos casos, se indica en la siguiente figura. En la misma, F_{ba} es la fuerza que el bloque grande ejerce sobre el bloque en cuestión y F_r es la fuerza de rozamiento existente.



Para que no exista desplazamiento entre los bloques la aceleración vertical debe ser cero. A su vez, el contacto permanente entre ambos indica que la aceleración horizontal es la misma. Por lo tanto

Caso I:

La aceleración horizontal de ambos cuerpos es

Bloque a:

$$F - F_{ab} = m_a a_h \quad \rightarrow a_h = (F - F_{ab})/m_a.$$

Bloque b:

$$F_{ba} = m_b a_h \quad \rightarrow a_h = F_{ba}/m_b.$$

Obviamente, por acción y reacción, $F_{ba} = F_{ab}$. De ambas ecuaciones se obtiene que

$$F_{ba} = \frac{m_b}{m_a + m_b}\ F.$$

Dado que la aceleración vertical debe ser cero y que $F_r \leq \mu\ F_{ba}$, se obtiene que

$$F_r = m_b\ g \leq \mu\ F_{ba} \quad \rightarrow \quad F \geq \frac{1}{\mu}\ (m_a + m_b)\ g.$$

Caso II:

La aceleración horizontal de ambos cuerpos es

Bloque a:

$$F - F_r = m_a a_h \quad \rightarrow a_h = (F - F_r)/m_a.$$

Bloque b:

$$F_r = m_b a_h \quad \rightarrow a_h = F_r/m_b.$$

Igualando la aceleración horizontal resultante de ambos balances se obtiene

$$F_r = \frac{m_b}{m_a + m_b}\ F$$

donde $F_r \leq \mu\ F_{ba}$.

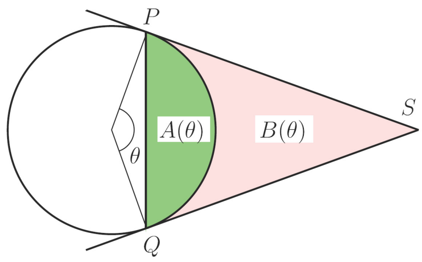
Ninguno de los bloques presenta aceleración vertical. En particular, del balance de fuerzas en la dirección vertical en el bloque b se obtiene que $m_b\ g = F_{ba}$. Por lo tanto

$$F_r = \frac{m_b}{m_a + m_b}\ F \leq \mu\ F_{ba} = \mu\ m_b\ g \quad \rightarrow \quad F \leq \mu\ (m_a + m_b)\ g.$$

Problema 8. Cálculo diferencial e integral

Un arco de circunferencia $\widehat{PQ}$ está subtendido por el ángulo θ, como muestra la figura. Sea $A(\theta)$ el área entre la cuerda $\overline{PQ}$ y el arco $\widehat{PQ}$. Sea $B(\theta)$ el área entre los segmentos tangentes a la circunferencia $\overline{PS}$ y $\overline{QS}$, y el arco $\widehat{PQ}$. Calcular:

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



Respuesta

Para resolver el límite hay que encontrar las áreas $A(\theta)$ y $B(\theta)$.

Para calcular $A(\theta)$, primero calculamos el área del sector circular de ángulo θ y radio r, que llamamos $A'(\theta)$. Esto es:

$$A'(\theta) = \pi r^2 \left(\frac{\theta}{2\pi}\right) = \frac{r^2\theta}{2}.$$

Para obtener $A(\theta)$, a esta área le tenemos que restar el triángulo formado por el centro del círculo, P y Q. La base de este triángulo es $2r\text{sen}(\theta/2)$ y su altura es $r\cos(\theta/2)$. Entonces:

$$A(\theta) = A'(\theta) - \frac{1}{2}2r\text{sen}(\theta/2)\mathrm{r}\cos(\theta/2) = \frac{\mathrm{r}^2}{2}(\theta - \text{sen}(\theta)).$$

Para calcular $B(\theta)$, primero calculamos el área del triángulo PQS, cuya área es igual a la suma de $A(\theta)$ y $B(\theta)$. La base de este triángulo es la misma que la del anterior. Para ver la altura, identificamos los ángulos del triángulo: $(\theta/2)$ los de la base y $\pi - \theta$ el del vértice. Llamando R al lado $\overline{PS}$, la altura h será:

$$h = R\text{sen}(\theta/2).$$

Por otro lado:

$$R\cos(\theta/2) = r\text{sen}(\theta/2).$$

Entonces:

$$h = r\frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}.$$

El área del triángulo PQS será:

$$B(\theta) + A(\theta) = r^2\frac{\text{sen}^3(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = r^2\tan(\theta/2)\text{sen}^2(\theta/2).$$

De esta expresión podemos despejar el valor de $B(\theta)$ y ya podemos escribir el límite que tenemos que calcular:

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \frac{(r^2/2)(\theta - \text{sen}\theta)}{r^2\tan(\theta/2)\text{sen}^2(\theta/2) - (\mathrm{r}^2/2)(\theta - \text{sen}\theta)} = \lim_{\theta \longrightarrow 0} \frac{\theta - \text{sen}\theta}{2\tan(\theta/2)\text{sen}^2(\theta/2) - \theta + \text{sen}\theta}.$$

Para resolver este límite tenemos que aplicar L'Hopital:

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos\theta}{\tan^2(\theta/2) + \tan(\theta/2)\text{sen}\theta - 1 + \cos\theta}.$$

Ahora hay que aplicar L'Hopital de nuevo...

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \frac{\text{sen}\theta}{\frac{\text{sen}(\theta/2)}{\cos^3(\theta/2)} + \frac{\text{sen}\theta}{2\cos^2(\theta/2)} + \tan(\theta/2)\cos\theta - \text{sen}\theta}.$$

Y otra vez más para poder llegar al resultado que es 2.

Las cuentas se pueden simplificar un poco (conste que dije un poco...) si tenemos en cuenta que nos piden el límite para ángulos pequeños. En este caso, reemplazamos:

$$\text{sen}\theta = \theta$$

y

$$\cos\theta = 1.$$

Poniendo estos valores luego de aplicar L'Hopital una vez ya llegamos a que el límite es 2.

Si quieren usar esto de entrada, van a tener que usar más términos del desarrollo de Taylor alrededor de cero para el seno y el coseno. Si nos quedamos con los dos primeros términos:

$$\text{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

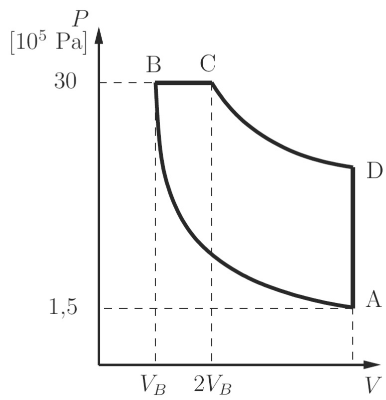
Y la expresión para el límite es:

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \frac{\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^5}{48}}{\frac{\theta^3}{12} - \frac{\theta^5}{96} + \frac{\theta^7}{768} - \frac{\theta^9}{55296}}.$$

Ahora, estamos buscando el límite alrededor de 0, o sea que θ es muy pequeño. Entonces despreciamos los ordenes superiores, nos quedamos solo con los términos en θ^3 y encontramos que el límite es 2.

Problema 9. Calor y calorimetría

Una máquina térmica trabaja sobre 3 moles de un gas ideal monoatómico, realizando el ciclo reversible ABCD, representado esquemáticamente en la figura. La curva AB es una adiabática y la curva CD es una isoterma. La temperatura en el punto A es de $20^0 C$. La presión en los puntos A y B vale, respectivamente, 1,5 x 10^5 Pa y 30 x 10^5 Pa. El volumen del gas en el punto C es el doble que en el punto B. La constante de los gases es R = 8,314 J/molK. En base a estos datos:
a) Calcular la presión, el volumen y la temperatura en los vértices del ciclo en que una o más de esas variables son desconocidas.
b) Calcular el trabajo en cada tramo del ciclo.
c) Hallar el rendimiento del ciclo.



Respuesta

a) Nos piden encontrar los valores de presión, temperatura y volumen en cada vértice del ciclo.

A) Sabemos ya que $T_A = 293\ K$ y $P_A = 1{,}5 \times 10^5\ Pa$. Para calcular el volumen utilizamos la ecuación de los gases ideales:

$$P_A V_A = nRT_A.$$

Despejando el volumen obtenemos $V_A = 0{,}0487\ m^3$.

B) Sabemos que $P_B = 30 \times 10^5\ Pa$ y que el proceso AB es adiabático, con lo cual $PV^\gamma = cte$. Como para un gas monoatómico $\gamma = 1{,}67$, entonces:

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma.$$

de donde obtenemos que $V_B = 8{,}1 \times 10^{-3}\ m^3$.
Planteando la ecuación de los gases ideales sacamos el valor para la temperatura en ese punto que es $T_B = 974{,}14\ K$.

C) La presión en este punto es igual a la presión en el punto B, o sea que $P_C = 30 \times 10^5\ Pa$.
El volumen en el punto C es el doble que en el punto B, y nos queda que $V_C = 0{,}0162\ m^3$.
Para obtener la temperatura usamos la ecuación de los gases ideales: $T_C = 1948{,}52\ K$.

D) Sabemos que la temperatura en este punto es igual a la temperatura en el punto C: $T_D = 1948{,}52\ K$.
Sabemos que el volumen en este punto es igual al volumen en el punto A: $V_D = 0{,}0487\ m^3$.
Obtenemos la presión de la ecuación de los gases ideales: $P_D = 9{,}98 \times 10^5\ Pa$.

b) Calculemos el trabajo en cada ciclo.

AB) Este tramo es adiabático, con lo cual:

$$W_{AB} = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1}$$

y encontramos que $W_{AB} = 25361{,}19\ J$.

BC) Este es un proceso isobárico, entonces:

$$W_{BC} = -P_B(V_C - V_B)$$

y $W_{BC} = -24303\ J$.

CD) En este tramo el proceso es isotérmico:

$$W_{CD} = -nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C}$$

y $W_{CD} = -53492{,}44\ J$.

DA) Este es un proceso isocórico con lo cual el trabajo de este tramo es nulo: $W_{DA} = 0$.

c) Para poder determinar la eficiencia de esta máquina, primero tenemos que entender cómo funciona. Recorriendo el ciclo en el sentido de las agujas del reloj, tenemos que ver en qué tramos el sistema absorbe calor y en qué tramos el sistema entrega calor. Para ello tenemos que tener en cuenta que el calor absorbido por el sistema será positivo y el calor entregado por el sistema será negativo. Calculemos entonces el calor en cada tramo.

AB) El proceso es adiabático entonces no se intercambia calor con el medio ($Q_{AB} = 0$).

BC) En un proceso a presión constante el calor se expresa como:

$$Q_{BC} = nC_P(T_C - T_B) = 60801{,}31\, J.$$

En un gas monoatómico $C_P = 20{,}8\ J$.

CD) Es un proceso isotérmico, con lo cual $Q_{CD} = -W_{CD} = 53492{,}44\ J$.

DA) En un proceso a volumen constante, el calor se expresa como:

$$Q_{DA} = nC_V(T_A - T_D) = -62082\, J.$$

En un gas monoatómico $C_V = 12{,}5\ J$.

Analizando los signos vemos que comprimimos el gas adiabáticamente en el tramo AB, luego el gas se expande a presión constante absorbiendo calor en el tramo BC, continúa la expansión en el tramo CD, ahora isotérmcamente, absorbiendo calor y finalmente el sistema entrega calor en el proceso a volumen constante DA. La eficiencia será la relación entre el trabajo neto del sistema (calor que ingresa al sistema menos calor que sale del sistema) y el calor que ingresa al sistema:

$$\varepsilon = \frac{\mid Q_{BC} + Q_{CD} \mid - \mid Q_{DA} \mid}{\mid Q_{BC} + Q_{CD} \mid} = 0{,}457.$$

Con lo cual vemos que la eficiencia de esta máquina térmica es de aproximadamente 46 %.

Problema 10. Probabilidad

Una vieja calculadora funciona tan mal que, en el 50 % de las operaciones aritméticas que realiza, cambia la primera cifra luego de la coma decimal del resultado por un dígito cualquiera entre 0 y 9. Un usuario desprevenido ingresa el número 0,03 en la calculadora, y lo multiplica dos veces por 10. Mostrar que la probabilidad de que el resultado sea exactamente 3,00 es, aproximadamente, 0,30.

Respuesta

Tenemos dos eventos consecutivos: la primera multiplicación y la segunda. La primera multiplicación debería resultar en 0,30. Sin embargo, luego de realizar la misma se obtiene el siguiente conjunto de resultados con probabilidad dada:

Resultado	Probabilidad
0,00	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
0,10	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
0,20	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
0,30	$0{,}50 + 0{,}50 * (1/10) = 0{,}55$
0,40	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
0,50	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
0,60	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
0,70	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
0,80	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
0,90	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$

Cualquiera de los resultados que en esta primera multiplicación están mal, van a dar como resultado de la segunda multiplicación un resultado distinto de 3,00. Por ejemplo, si luego de la primera multiplicación tenemos como resultado 0,10, la segunda multiplicación generará el conjunto de resultados $\{1{,}0; 1{,}1; \ldots; 1{,}9\}$, todos distintos de 3,00.

La única posibilidad de obtener 3,00 proviene de que la primera multiplicación presente un resultado correcto, 0,3. En forma análoga al caso anterior, el conjunto de resultados posibles *sabiendo que el resultado de la primera multiplicación es correcto*, con sus respectivas probabilidades, es

Resultado	Probabilidad
3,00	$0{,}50 + 0{,}50 * (1/10) = 0{,}55$
3,10	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
3,20	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
3,30	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
3,40	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
3,50	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
3,60	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
3,70	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
3,80	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$
3,90	$0{,}50 * (1/10) = 0{,}05$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener exactamente 3,00 como resultado es

$$
\begin{aligned}
Prob(Final\ correcto) &= Prob(1\ correcto) \cdot Prob(2\ correcto|1\ correcto) \\
&= 0{,}55 \cdot 0{,}55 = 0{,}3025
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado la notación de probabilidad condicionada. Notar que en el desarrollo diferenciamos el hecho de que un resultado sea correcto respecto de que la multiplicación lo sea, en el sentido de que muestra directamente lo que resulta (porque uno de los resultados al azar también genera un resultado correcto).