Instituto
Balseiro

Prueba de Admisión

5 de abril de 2019

Problemas de la tarde

14:00 – 16:00

Prueba de Admisión

Instituto Balseiro - 2019
Instrucciones

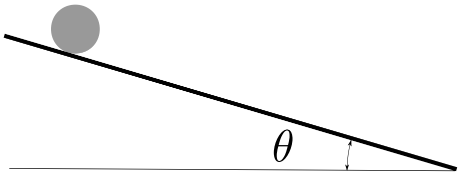
Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, los enunciados de 5 problemas.

- Revise las páginas y verifique que estén todas bien impresas.
- Escriba su nombre en las hojas de respuestas y firme al pie.
- Responda cada uno de los problemas comenzando en su correspondiente hoja.
- Si fuera necesario más espacio utilice hojas adicionales independientes para cada problema (no responder más de un problema por hoja).
- Responda en forma clara y concisa.
- No responder más de un problema por hoja.
- Tiene usted a su disposición **2** horas para terminar esta parte del examen. Esto representa en promedio unos 25 minutos para cada problema. Trate de no demorarse demasiado en problemas que le resulten difíciles.
- Antes de entregar, ordene y numere todas las hojas del examen, indicando en la primera página el total de hojas que entregará.
- Al final de este cuadernillo encontrará una recopilación de todos los problemas, que puede retirar y llevarse cuando termine.

¡ÉXITO!

Instituto Balseiro: Teléfono: (0294) 444-5162 - FAX: (0294)-444-5149
San Carlos de Bariloche - Río Negro

Problema 8



Un cilindro de masa m (homogéneamente distribuida) y radio R se apoya sobre una rampa infinita de ángulo θ como se muestra en la figura. En el instante inicial el cilindro está en reposo.

a) Calcule la velocidad lineal y angular del cilindro como función del tiempo suponiendo que el mismo rueda sin deslizar. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático μ_e necesario para que esto ocurra?

b) Suponiendo que μ_e fuese menor que el valor mínimo hallado en a), calcule la velocidad lineal y angular del cilindro como función del tiempo. Suponga un coeficiente de rozamiento dinámico $\mu_d < \mu_e$.

Problema 9

Se tiene un hilo de longitud l y un cilindro de altura h y diámetro d. Se enrolla el hilo en el cilindro, empezando en un extremo y terminando en el otro, de manera tal que el hilo da exactamente n vueltas completas y a paso constante.

a) Exprese l como función de h, d y n.

b) Manteniendo fijo el volumen del cilindro y el número de vueltas n, muestre que existen valores de h y d que minimizan la longitud del hilo. ¿Cuáles son esos valores?

Problema 10

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para series de términos reales. Justifique su respuesta mediante una demostración o dando un contraejemplo.

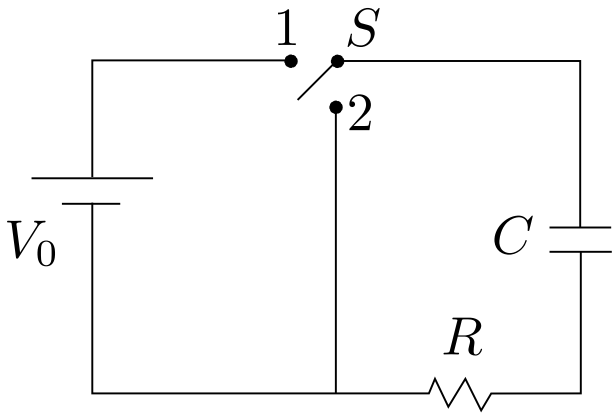
a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, también lo es $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, a_n$.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente y $c_n \leq b_n$ para todo n, luego $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ también es convergente.

c) Si $d_n = \beta_n / 10^n$ con β_n tomando valores enteros entre 0 y 9, luego $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ es convergente.

d) Si e_n es positivo para todo $n > 1300$ y $\sum_{n=1}^{2600} e_n > 1$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ tiende a $+\infty$.

Problema 11



En el circuito de la figura se tiene una fuente de tensión V_0, una resistencia R, un interruptor S y un capacitor C. Inicialmente el capacitor está descargado y el interruptor está en posición neutra como se muestra en la figura.

De ahí en más se inicia una serie de ciclos ininterrumpidos de carga y descarga del capacitor. Cada ciclo consiste en conectar el punto 1 del interruptor durante un tiempo $t_1 = 2RC$, cambiando luego al punto 2 del interruptor durante $t_2 = RC$.

a) Calcule los valores de carga del capacitor en función de V_0, R y C para los instantes inmediatamente anteriores a cambiar la condición del interruptor, luego de un número alto de ciclos.

b) ¿Cambia el resultado si el capacitor tenía inicialmente una carga Q_0? ¿Por qué?

Problema 12

a) Se eligen al azar dos puntos sobre una circunferencia de radio R. ¿Cuál es la probabilidad de que la separación angular de los mismos (es decir, el ángulo entre ellos medido desde el centro del círculo) sea menor a $10°$?

b) Se eligen al azar dos puntos de un segmento recto de longitud L. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia entre los mismos sea menor a $L/10$?

Problema 1

Juan tiene la costumbre de tomar el café con leche lo más frío posible. Preparó una taza con 200 g de café que está a $T_0 = 90$ °C, y le agregará una cantidad fija (30 g) de leche a temperatura ambiente ($T_{\text{amb}} = 20$ °C). Dispone de cinco minutos para que su bebida se enfríe o se le hará tarde para rendir el examen de ingreso.

a) Calcule la temperatura a la que tomaría el café con leche en cada uno de los siguientes casos:

   I) Agrega la leche en el momento inicial y espera 5 minutos a que el café con leche se enfríe para beberlo.

   II) Deja enfriar 5 minutos el café solo y luego lo mezcla con la leche y lo bebe.

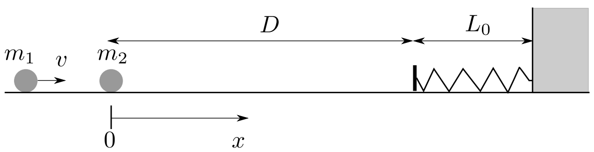
b) ¿Hay diferencia entre las dos temperaturas obtenidas? ¿Por qué?

NOTAS: se considera que la pérdida de calor del recipiente con café o café con leche, puede modelarse por la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = k\,(T - T_{\text{amb}})$$

donde T es la temperatura del contenido de la taza y k es una constante de valor $k = 0{,}8$ W/°C. La capacidad calorífica del café, de la leche y de la mezcla se consideran iguales, de valor $c = 4{,}2$ J/(g °C).

Problema 2



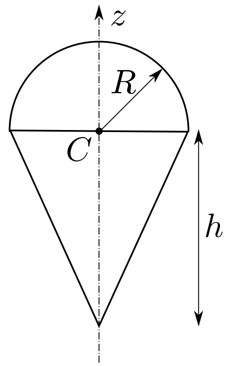
Una partícula puntual de masa m_1 se desliza horizontalmente sin rozamiento con velocidad v sobre una plataforma como se indica en la figura. En la posición $x = 0$ tiene un choque elástico con otra partícula puntual de masa m_2 que estaba inicialmente en reposo. Luego del choque, la partícula de masa m_2 se desplaza una distancia D para después comprimir un resorte ideal de longitud en reposo L_0. En el momento de máxima compresión, el resorte tiene una longitud $L_0/2$.

a) Calcule la constante elástica k del resorte.

b) Determine el cociente de masas m_2/m_1 sabiendo que en el momento de máxima compresión del resorte la partícula de masa m_1 se encuentra en $x = D/2$.

Admisión Instituto Balseiro – 2019

Problema 3



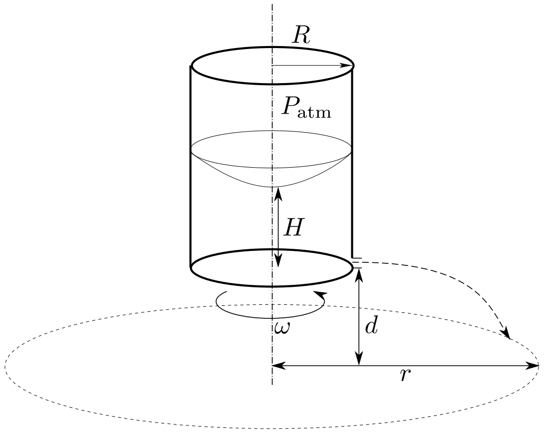
Considere un casquete semiesférico de radio R con su borde unido al de un cono de altura h, tal como se muestra en la figura. Fije coordenadas cartesianas con origen en el centro C del casquete y tal que el borde de este último esté contenido en el plano $z = 0$. Llámese S_1 y S_2 a las superficies del casquete y del cono, respectivamente.

a) Muestre que

$$\iint_{S_1} (y^2, z^2, x^2) \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\pi\, R^4}{4}.$$

b) ¿Cuánto vale la integral análoga para la superficie S_2? ¿El resultado obtenido depende de h? Justifique.

Problema 4



Un tanque cilíndrico de radio R contiene agua y gira sobre su eje con velocidad angular ω constante. En un punto de su pared, muy cerca del fondo, se sitúa un pequeño orificio por el que sale líquido horizontalmente. La altura del líquido en el centro del tanque es H.

a) ¿Cuáles son las componentes radial y tangencial de la velocidad de salida del líquido por el orificio?

b) Si la base del tanque se encuentra a una altura d del suelo, calcule el radio r al cual el chorro de agua llega al suelo.

Admisión Instituto Balseiro – 2019

Problema 5

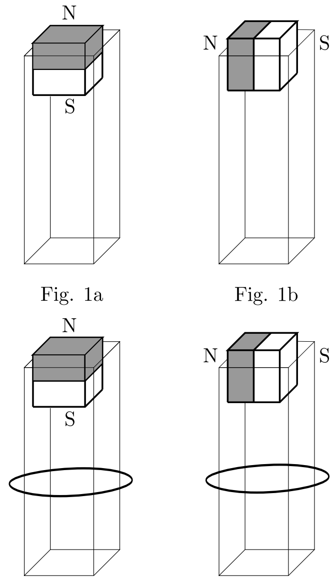


Fig. 1a Fig. 1b

Fig. 2a Fig. 2b

Un imán con forma de cubo, con sus polos en caras opuestas, puede moverse por el interior de un tubo hueco de plástico y de sección cuadrada. El imán cabe exactamente en el interior del tubo y se mueve sin rozamiento respecto de éste.

El tubo se mantiene siempre fijo en una misma posición vertical apoyado sobre una mesa. El imán se deja caer con velocidad inicial cero desde la parte superior del tubo. En estas condiciones el tiempo que demora el imán en golpear contra la mesa es independiente de la orientación del imán (Fig. 1a y 1b).

Se coloca por fuera del tubo de plástico, a media altura, centrado y en una posición fija, un anillo de cobre perpendicular al tubo.

a) Discuta si para cada uno de los casos (Fig. 2a y 2b) el movimiento del imán producirá o no una corriente eléctrica en el anillo de cobre.

b) Según las orientaciones del imán, se verifica que en presencia del anillo los tiempos de caída t_a y t_b (Fig. 2a y 2b) son distintos entre sí. Diga cuál es mayor y explique el motivo.

Problema 6

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considere una transformación lineal $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T_\alpha \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3\alpha & \alpha & 2\alpha - 4 \\ -6\alpha & 2\alpha & 4\alpha - 8 \\ 6 - 3\alpha & \alpha - 2 & 2\alpha - 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a) ¿Existe algún $\alpha \in \mathbb{R}$ para el que T_α sea invertible?

b) El núcleo de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por los vectores v tales que $T(v) = (0, 0, 0)$. Halle los valores de α para los cuales la dimensión del núcleo de T_α es máxima. ¿Cuál es la dimensión del núcleo en este caso?

c) La imagen de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por los vectores w tales que $w = T(v)$ para algún v. Para cada valor α hallado en el punto anterior, compruebe si el vector

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pertenece a la imagen de T_α o no.

Problema 7

Para estudiar un efecto de interacción entre luz y ondas de ultrasonido se requiere un haz de luz paralelo de sección circular con un diámetro de entre 1 cm y 1,5 cm. En el laboratorio se cuenta con un haz de luz paralelo de sección circular de 3 mm de diámetro. Se dispone también de lentes delgadas convergentes con distancias focales de 5 cm, 10 cm, 20 cm y 30 cm.

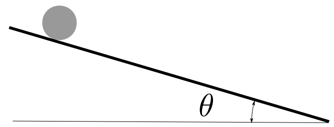
Indique cómo se podría aumentar el diámetro del haz de luz utilizando:

a) Un arreglo de dos de estas lentes convergentes.

b) Una de las lentes convergentes y una lente delgada divergente con distancia focal de 5 cm.

En ambos casos realice un diagrama de rayos del sistema donde se especifique claramente la disposición y distancia entre las lentes utilizadas.

Problema 8



Un cilindro de masa m (homogéneamente distribuida) y radio R se apoya sobre una rampa infinita de ángulo θ como se muestra en la figura. En el instante inicial el cilindro está en reposo.

a) Calcule la velocidad lineal y angular del cilindro como función del tiempo suponiendo que el mismo rueda sin deslizar. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático μ_e necesario para que esto ocurra?

b) Suponiendo que μ_e fuese menor que el valor mínimo hallado en a), calcule la velocidad lineal y angular del cilindro como función del tiempo. Suponga un coeficiente de rozamiento dinámico $\mu_d < \mu_e$.

Problema 9

Se tiene un hilo de longitud l y un cilindro de altura h y diámetro d. Se enrolla el hilo en el cilindro, empezando en un extremo y terminando en el otro, de manera tal que el hilo da exactamente n vueltas completas y a paso constante.

a) Exprese l como función de h, d y n.

b) Manteniendo fijo el volumen del cilindro y el número de vueltas n, muestre que existen valores de h y d que minimizan la longitud del hilo. ¿Cuáles son esos valores?

Problema 10

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para series de términos reales. Justifique su respuesta mediante una demostración o dando un contraejemplo.

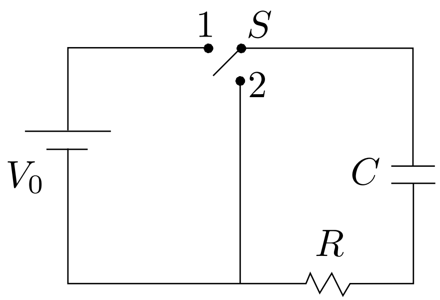
a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, también lo es $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, a_n$.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente y $c_n \leq b_n$ para todo n, luego $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ también es convergente.

c) Si $d_n = \beta_n / 10^n$ con β_n tomando valores enteros entre 0 y 9, luego $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ es convergente.

d) Si e_n es positivo para todo $n > 1300$ y $\sum_{n=1}^{2600} e_n > 1$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ tiende a $+\infty$.

Problema 11



En el circuito de la figura se tiene una fuente de tensión V_0, una resistencia R, un interruptor S y un capacitor C. Inicialmente el capacitor está descargado y el interruptor está en posición neutra como se muestra en la figura.

De ahí en más se inicia una serie de ciclos ininterrumpidos de carga y descarga del capacitor. Cada ciclo consiste en conectar el punto 1 del interruptor durante un tiempo $t_1 = 2RC$, cambiando luego al punto 2 del interruptor durante $t_2 = RC$.

a) Calcule los valores de carga del capacitor en función de V_0, R y C para los instantes inmediatamente anteriores a cambiar la condición del interruptor, luego de un número alto de ciclos.

b) ¿Cambia el resultado si el capacitor tenía inicialmente una carga Q_0? ¿Por qué?

Problema 12

a) Se eligen al azar dos puntos sobre una circunferencia de radio R. ¿Cuál es la probabilidad de que la separación angular de los mismos (es decir, el ángulo entre ellos medido desde el centro del círculo) sea menor a $10°$?

b) Se eligen al azar dos puntos de un segmento recto de longitud L. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia entre los mismos sea menor a $L/10$?
