Instituto
Balseiro

Prueba de Admisión

4 de mayo de 2018
Problemas de la tarde
14:00 – 16:00

Instituto Balseiro Prueba de Admisión

Instituto Balseiro - 2018
Instrucciones

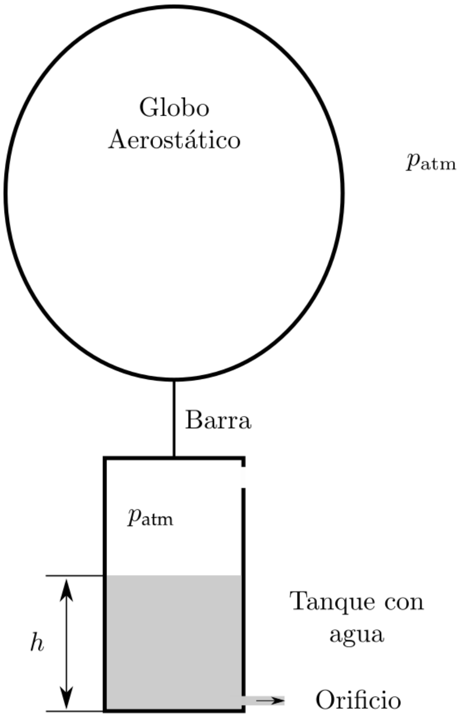
Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, los enunciados de 5 problemas.

- Revise las páginas y verifique que estén todas bien impresas.
- Escriba su nombre en las hojas de respuestas y firme al pie.
- Responda cada uno de los problemas comenzando en su correspondiente hoja. Si fuera necesario más espacio continúe en hojas adicionales. Responda en forma clara y concisa.
- Tiene usted a su disposición **2** horas para terminar esta parte del examen. Esto representa unos 25 minutos para cada problema. Trate de no demorarse demasiado en problemas que le resulten difíciles.
- Antes de entregar, ordene y numere todas las hojas del examen, indicando en la primera página el total de hojas que entregará.
- Al final de este cuadernillo encontrará una recopilación de todos los problemas, que puede retirar y llevarse cuando termine.

¡ÉXITO!

Instituto Balseiro: Teléfono: (0294) 444-5162 - FAX: (0294)-444-5149
San Carlos de Bariloche - Río Negro

Problema 8



Un tanque cilíndrico de 1 m de radio interior contiene agua hasta una altura h. Cerca del fondo del tanque se encuentra un pequeño orificio circular por el que puede salir horizontalmente un chorro de agua de radio 1 mm.

1. ¿Cuál es el caudal que sale por el orificio si el tanque está apoyado sobre el piso?
2. ¿Cuál es el caudal que sale por el orificio si el tanque se encuentra en caída libre? Explique.
3. En la situación de la figura, el tanque se encuentra colgado de un globo aerostático por medio de una barra. La masa conjunta del tanque vacío, la barra y el globo es de 1000 kg. Si h es 1 m y el globo genera una fuerza de empuje vertical fija de 65000 N, ¿cuál es el caudal que sale por el orificio en este caso?

Problema 9

Halle el máximo volumen posible de un cono recto totalmente contenido en una esfera de radio R.

Dato: el volumen V de un cono recto de altura h y base de radio r es $V = \pi\, h\, r^2 \big/ 3$.

Problema 10

Bob y Patricio discuten si es más conveniente correr o caminar para mojarse lo menos posible bajo la lluvia. Suponga que Bob es un paralelepípedo de 1,8 m de altura, 0,5 m de ancho y 0,2 m de espesor y que absorbe toda el agua que lo toca. La lluvia cae a razón de 20 mm de agua por hora y las gotas caen verticalmente a 10 m/s.

1. ¿Cuánta agua recibe Bob al recorrer una distancia $L = 100\ m$ en línea recta si se desplaza a una velocidad v?

2. ¿A qué velocidad debería moverse para mojarse lo menos posible?

3. Si la velocidad de la lluvia tiene además una componente horizontal v' hacia la espalda de Bob (esto es: en la dirección hacia la que se desplaza), ¿cuánta agua recibe si $v < v'$?

Problema 11

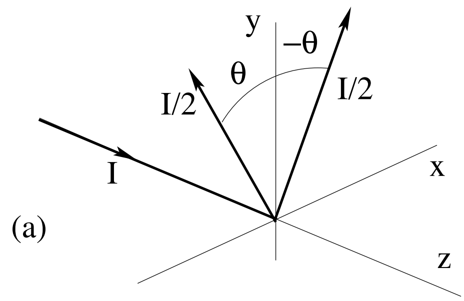
Sea la ecuación diferencial para $y(t)$:

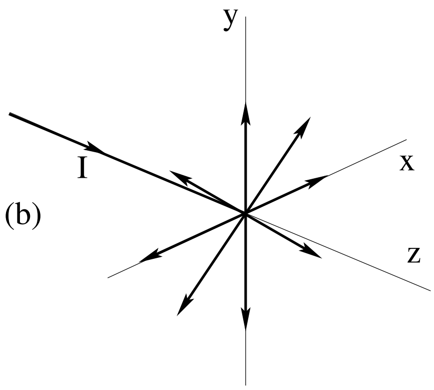
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(e^{(\sin(t)-t)}e^{y} - 1\right)\,(\cos(t) - 1)\,.$$

1. Cambie la variable independiente t por $x = \sin(t) - t$, la variable dependiente y por $z = x + y$, y escriba la ecuación diferencial resultante para la función $z(x)$.

2. Halle la solución $y(t)$ que cumpla $y(0) = 0$.

Problema 12



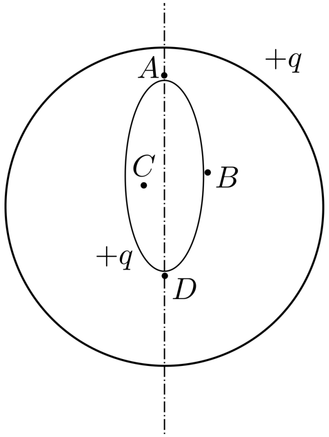


La corriente que circula por un cable recto (en la dirección z) se divide en dos partes iguales al llegar a $z = 0$, como se indica en la figura (a). Los dos cables salientes están en el plano (x, y), formando ángulos θ y $-\theta$ con respecto al eje y.

1. Muestre que en todo punto del plano (y, z) el campo magnético apunta en la dirección x.

2. En el caso de la figura (b) la corriente que llega a $z = 0$ se distribuye uniformemente en el plano (x, y). Generalizando el resultado del punto anterior, pruebe que en este caso el campo magnético en cualquier punto $\mathbf{r}$ del espacio tiene la dirección del producto vectorial $\mathbf{r} \times \hat{z}$, y calcule su módulo.

Problema 1



Se tienen dos casquetes conductores cargados con carga $+q$ cada uno y que no están en contacto entre sí. En la figura se muestra un corte transversal de los mismos. El casquete exterior es esférico (de radio R) y el interior es un elipsoide que tiene simetría de revolución alrededor de un eje que pasa por el centro del casquete esférico (tal como se indica en la figura). Las posiciones A, B, C y D están ubicadas en el plano del corte transversal, con A, B y D apenas por fuera del casquete elipsoidal.

1. Ordene las posiciones A, B, C y D de menor a mayor en función a la intensidad del campo eléctrico. Justifique su respuesta.
2. Calcule el campo eléctrico fuera del casquete esférico.
3. Dibuje esquemáticamente las líneas de campo eléctrico en todo el plano de la figura.

Problema 2

Una plataforma giratoria tiene su eje de rotación inclinado un ángulo θ respecto a la vertical. Sobre la plataforma se coloca un pequeño cilindro de radio r y altura $h = r$ a una distancia D del eje de giro, con $r \ll D$. El cilindro está apoyado sobre su base circular.

1. Si la plataforma gira con velocidad angular ω, ¿cuál es el coeficiente de fricción mínimo para que el cilindro no deslice sobre la plataforma?
2. Si el coeficiente de fricción fuera suficientemente alto para que el cilindro no deslice, ¿hasta qué velocidad angular puede asegurarse que el mismo permanecerá completamente apoyado sobre la plataforma?

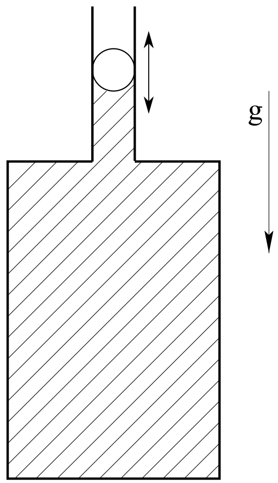
Selección Instituto Balseiro – 2016

Problema 3

Para las siguientes funciones, diga si existe o no el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$. En caso afirmativo calcule su valor.

1. $F(x,y) = \left(x - y^2\right) / \left(x + 5y^2\right)$.
2. $F(x,y) = x^2 y / \left(x^3 + 3y^3\right)$.
3. $F(x,y) = \begin{cases} y, & x \geq 0, \\ -y, & x < 0. \end{cases}$

Problema 4



La figura muestra un recipiente cerrado herméticamente que contiene un gas ideal. Cerrando el tubo vertical que sale del recipiente se encuentra una esfera de masa M y radio R que puede deslizar sin rozamiento por el tubo. En el exterior del recipiente se encuentra aire a la presión atmosférica p_A. En equilibrio, el volumen total de gas encerrado es V_0. Cuando se altera levemente la posición de equilibrio de la esfera, la misma realiza pequeñas oscilaciones.

1. Determine la frecuencia f de esas oscilaciones en los casos en que:
   a) La temperatura del gas es fija.
   b) El gas no intercambia calor con las paredes del recipiente ni con la esfera.
2. ¿Cuál cree que es la suposición más realista entre la a) y la b)? ¿Por qué?

Problema 5

Una sala limpia es un ambiente diseñado para trabajar con bajos niveles de contaminación. En estas salas se instalan, por ejemplo, laboratorios químicos, biológicos, de instrumentación o de ciencia de materiales. El nivel de contaminantes presentes en la atmósfera de una sala limpia se reduce y controla mediante sistemas de filtrado de partículas y circulación forzada de aire. En este problema se describe aproximadamente la evolución temporal de la concentración volumétrica $C(t)$ de contaminantes en el aire de una sala de este tipo. La concentración volumétrica se define como el volumen de contaminantes sobre el volumen total.

Considere que en el instante $t = 0$, es nula la cantidad total de contaminantes en una sala limpia de volumen $V = 5000\ m^3$. En dicho momento ingresan trabajadores al recinto a partir del cual liberan $Q = 0{,}05\ m^3/min$ de contaminantes en el mismo. El sistema de circulación forzada de la sala extrae $0{,}1\ m^3/min$ del aire presente en la misma y, a su vez, ingresa el mismo caudal de aire completamente limpio. Para cada instante, se puede considerar que los contaminantes están distribuidos de manera uniforme en todo el volumen de la sala. Bajo estos supuestos, la ecuación que describe la concentración de contaminantes en el sistema puede escribirse como: $\frac{dC}{dt} = \alpha + \beta C$ para $t > 0$.

1. Determine los valores de los parámetros α y β en función de los datos del problema, indicando signos y unidades.
2. Halle la solución de la ecuación anterior.
3. Determine el tiempo t_{max} en el cual se alcanza la máxima concentración permitida de contaminantes $C_{max} = 10^{-3}$.

Problema 6

Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ junto con su producto escalar usual (producto interno). Sean dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^3$ y una transformación lineal $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A(v) = w$.

1. Diga si es posible que A defina una rotación en torno a algún eje que pase por el origen en los casos:

   a) $v = (1, 0, 1)$ y $w = (0, 0, 2)$.
   b) $v = (1, 1, 1)$ y $w = \left(0, \sqrt{2}, 1\right)$.

2. Si hubiera casos afirmativos en el punto anterior, encuentre un eje de rotación y el ángulo asociado.
3. Extienda el par de vectores $\{v, w\}$ del punto 1b a una base de $\mathbb{R}^3$. Justifique.
4. Escriba las coordenadas del vector $\left(1 - \sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el punto anterior.

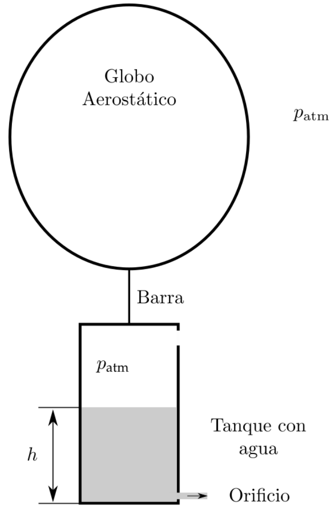
Problema 7

Una placa metálica espejada está cubierta por una delgada capa de agua que se evapora a tasa constante. Incide sobre ella un haz de luz monocromática y coherente de 0,68 micrómetros de longitud de onda, con un ángulo de 30 grados respecto a la normal a la superficie. Se observa que en el haz reflejado por el sistema aparecen máximos de intensidad en intervalos de tiempo de 15 minutos.

¿A qué ritmo disminuye el espesor de la capa de agua?

Dato: el índice de refracción del agua es 1,34.

Problema 8



Un tanque cilíndrico de 1 m de radio interior contiene agua hasta una altura h. Cerca del fondo del tanque se encuentra un pequeño orificio circular por el que puede salir horizontalmente un chorro de agua de radio 1 mm.

1. ¿Cuál es el caudal que sale por el orificio si el tanque está apoyado sobre el piso?
2. ¿Cuál es el caudal que sale por el orificio si el tanque se encuentra en caída libre? Explique.
3. En la situación de la figura, el tanque se encuentra colgado de un globo aerostático por medio de una barra. La masa conjunta del tanque vacío, la barra y el globo es de 1000 kg. Si h es 1 m y el globo genera una fuerza de empuje vertical fija de 65000 N, ¿cuál es el caudal que sale por el orificio en este caso?

Problema 9

Halle el máximo volumen posible de un cono recto totalmente contenido en una esfera de radio R.

Dato: el volumen V de un cono recto de altura h y base de radio r es $V = \pi\, h\, r^2 \big/ 3$.

Problema 10

Bob y Patricio discuten si es más conveniente correr o caminar para mojarse lo menos posible bajo la lluvia. Suponga que Bob es un paralelepípedo de 1,8 m de altura, 0,5 m de ancho y 0,2 m de espesor y que absorbe toda el agua que lo toca. La lluvia cae a razón de 20 mm de agua por hora y las gotas caen verticalmente a 10 m/s.

1. ¿Cuánta agua recibe Bob al recorrer una distancia $L = 100$ m en línea recta si se desplaza a una velocidad v?

2. ¿A qué velocidad debería moverse para mojarse lo menos posible?

3. Si la velocidad de la lluvia tiene además una componente horizontal v' hacia la espalda de Bob (esto es: en la dirección hacia la que se desplaza), ¿cuánta agua recibe si $v < v'$?

Problema 11

Sea la ecuación diferencial para $y(t)$:

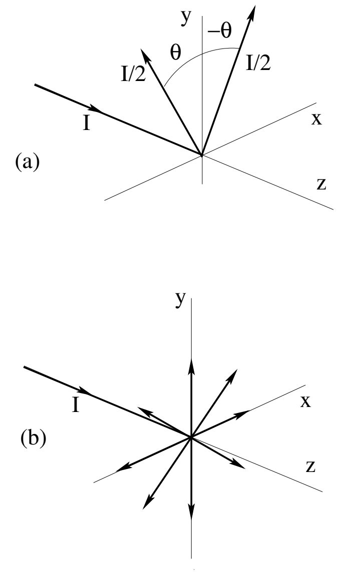
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(e^{(\sin(t)-t)}e^{y} - 1\right)\,(\cos(t) - 1)\,.$$

1. Cambie la variable independiente t por $x = \sin(t) - t$, la variable dependiente y por $z = x + y$, y escriba la ecuación diferencial resultante para la función $z(x)$.

2. Halle la solución $y(t)$ que cumpla $y(0) = 0$.

Selección Instituto Balseiro – 2016

Problema 12



La corriente que circula por un cable recto (en la dirección z) se divide en dos partes iguales al llegar a $z = 0$, como se indica en la figura (a). Los dos cables salientes están en el plano (x, y), formando ángulos θ y $-\theta$ con respecto al eje y.

1. Muestre que en todo punto del plano (y, z) el campo magnético apunta en la dirección x.

2. En el caso de la figura (b) la corriente que llega a $z = 0$ se distribuye uniformemente en el plano (x, y). Generalizando el resultado del punto anterior, pruebe que en este caso el campo magnético en cualquier punto $\mathbf{r}$ del espacio tiene la dirección del producto vectorial $\mathbf{r} \times \hat{z}$, y calcule su módulo.
