Instituto
Balseiro

Prueba de Admisión

29 de mayo de 2015
Problemas de la mañana
9:00 – 12:00

Instituto Balseiro Prueba de Admisión

Instrucciones - 2015

Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, los enunciados de 7 problemas.

- Revise las páginas y verifique que estén todas bien impresas.
- Tiene Usted a su disposición **3** horas para terminar esta parte del examen. Esto representa en promedio unos 25 minutos para cada problema. Trate de no demorarse demasiado en problemas que le resulten difíciles.
- Responda cada uno de los problemas comenzando en su correspondiente hoja. Si fuera necesario más espacio continúe en hojas adicionales. Responda en forma clara y concisa, y escriba con tinta.
- Escriba su nombre en las hojas de respuestas y firme al pie.
- Antes de entregar, ordene y numere todas las hojas del examen, indicando en la primera página el total de hojas que entregará.
- Al final del cuadernillo de problemas de la tarde, encontrará una hoja con todos los enunciados de la prueba, que puede retirar y llevarse cuando termine.

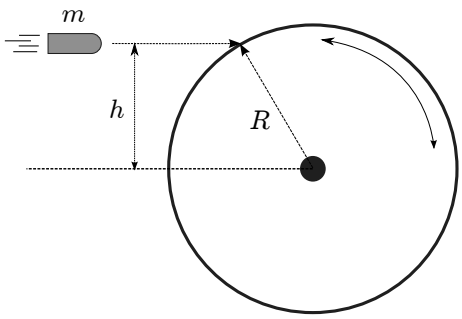
¡ÉXITO!

Instituto Balseiro: Teléfono: (0294) 444-5162 - FAX: (0294) 444-5149
San Carlos de Bariloche - Río Negro

Problema 1

Un disco de material plástico, radio R y espesor despreciable, tiene una carga eléctrica q uniformemente distribuida sobre su superficie. Se hace girar el disco con una frecuencia angular ω alrededor de su eje. Encontrar el campo de inducción magnética $\vec{B}$ para puntos situados a lo largo de ese eje.

Problema 2



Un cilindro homogéneo de masa $M = 4\ kg$ y radio $R = 0{,}4\ m$ puede girar alrededor de su eje de simetría. El cilindro se encuentra quieto cuando una bala de masa $m = 35\ g$ se dispara horizontalmente hacia él a una velocidad $V_0 = 350\ m/s$ y a una altura $h = 0{,}3\ m$ respecto al eje del cilindro, como se indica en la figura. Luego del impacto, la bala queda en la superficie del cilindro. Considerar que el rozamiento del cilindro con el eje de rotación corresponde a un momento $\tau = 2{,}3\,N\,m$.

a. Calcular la velocidad angular ω del sistema inmediatamente después del choque.

b. Calcular la energía mecánica perdida en el choque.

c. Calcular el número de vueltas que realiza el cilindro antes de detenerse.

Problema 3

a. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justificando la respuesta.

I. Si 4 es autovalor de A^2, ¿es cierto que 2 es autovalor de A?

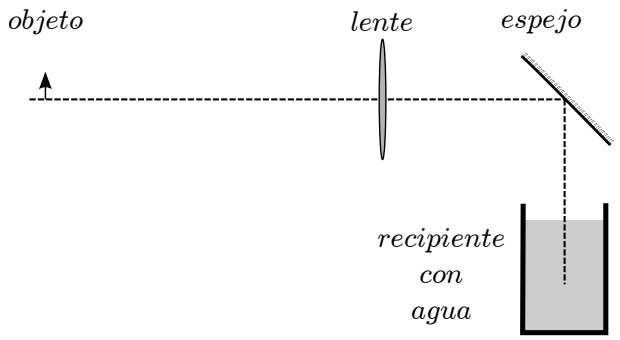
II. Si 4 es autovalor de A y A es invertible, ¿es cierto que $\frac{1}{4}$ es autovalor de A^{-1}?

b. Hallar los autovalores y una base de autovectores de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

Problema 4



Como se indica en la figura, un objeto de 5 mm de altura está ubicado a una distancia de 61 mm a la izquierda de una lente convergente fina, cuya distancia focal es de 33 mm. A la derecha, hay un espejo plano que está inclinado 45° con respecto al eje óptico de la lente. El punto de intersección del espejo con el eje óptico coincide con el foco de la lente. Por debajo del espejo se coloca un recipiente profundo con agua pura (índice de refracción $n = 1{,}33$). La superficie plana del agua queda a una distancia de 22 mm por debajo del punto donde el eje óptico de la lente y el espejo se intersecan. Encontrar la posición y el tamaño de la imagen.

Problema 5

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.

a. Verificar que $(0, 0)$ es un punto crítico de f.

b. Probar que f restringida a cualquier recta por el origen tiene un mínimo relativo en dicho punto.

c. ¿Es cierto que $(0, 0)$ es un mínimo relativo de f? Justificar claramente la respuesta.

Problema 6

En una palangana se pone a rodar, sin deslizar, una bolita de masa m a una altura $z = h$. Suponiendo que la palangana tiene forma de paraboloide de revolución dada por la siguiente ecuación:

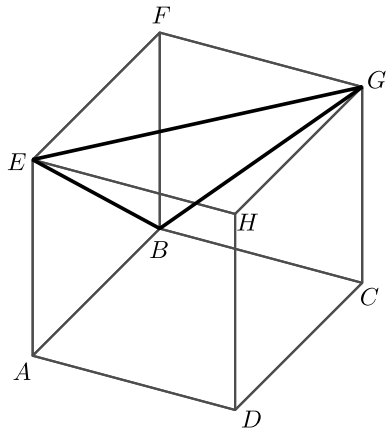
$$z = \frac{x^2 + y^2}{d}$$

donde d es una constante, y que la palangana se encuentra en un planeta con aceleración de la gravedad g en la dirección z:

a. ¿Qué velocidad v hay que imprimirle a la bolita para que realice un movimiento circular a altura constante?

b. ¿Qué forma funcional debería tener la superficie de la palangana para que la bolita realice un movimiento circular con una velocidad que no dependa de h?

Problema 7



Considerar el cubo con lados unitarios que se muestra en la figura. Resolver cada uno de los siguientes puntos justificando claramente la respuesta.

a. Sean $\overline{EB}$ y $\overline{GB}$ las rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por los vértices correspondientes del cubo. ¿Cuánto vale el ángulo entre $\overline{EB}$ y $\overline{GB}$.

b. Calcular el área del triángulo determinado por los vértices E, B y G.

c. Calcular el volumen del sólido determinado por los vértices E, F, G y B.

d. Si el cubo tuviese lados de longitud 2 indicar, sin hacer cuentas, cómo cambian las respuestas a los puntos anteriores.