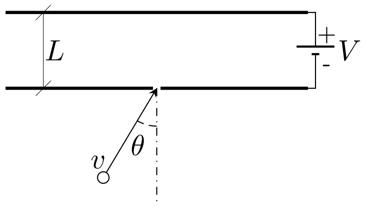
Problema 1

Un cubo de hielo de 200 g de masa, cuya temperatura es de $-150°$C, se coloca en un recipiente que contiene 500 g de agua a $20°$C. Encontrar la cantidad de hielo y la temperatura cuando se llega al equilibrio, suponiendo que el sistema se encuentra aislado térmicamente.

Datos – Calor específico del hielo: $C_h = 2090$ J/kg K; calor específico del agua: $C_a = 4184$ J/kg K; calor latente de fusión del hielo: $L = 3{,}33 \times 10^5$ J/kg.

Problema 2



Dos placas planas paralelas, situadas a distancia L una de la otra, se mantienen a una diferencia de potencial V por medio de una batería, como muestra la figura. Por un pequeño orificio practicado en la placa de abajo ingresan electrones (de masa m y carga $-e$), con velocidad v y formando un ángulo θ con la dirección perpendicular a la placa. Una pantalla fluorescente en la placa de arriba permite determinar dónde inciden los electrones.

Si se produce un pequeño cambio δV en la diferencia de potencial entre las placas, ¿cómo y cuánto varía la posición del punto donde inciden los electrones? (despreciar efectos relativistas y cuánticos). Realizar un gráfico esquemático que ilustre la dependencia de esta variación con la velocidad v y el ángulo θ.

Problema 3

Se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2\alpha x_2 + x_3 - \alpha x_4 = y_1, \\ 2\alpha x_1 - \alpha x_2 + (2\alpha + 1)x_3 = y_2, \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante.

1. Si $y_1 = 2$ e $y_2 = 1$,
   - *a*) ¿existe alguna solución $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ del sistema para algún valor de α? De ser así, elegir un valor de α para el que exista la solución y hallar x.
   - *b*) ¿Existe algún valor de α para el cual el sistema no tenga ninguna solución?
2. Si $y_1 = y_2 = 0$,
   - *a*) hallar una base del espacio de soluciones x del sistema (con $\alpha \in \mathbb{R}$ indeterminado).
   - *b*) ¿Cuáles son la mayor dimensión y la menor dimensión posibles del espacio de soluciones hallado en el punto anterior (dependiendo del valor de α)?

Problema 4

Consideremos a la Tierra como un cuerpo esférico de radio $R = 6{,}37 \times 10^6$ m y densidad de masa uniforme $\rho = 5{,}5 \times 10^3$ kg/m^3. Bajo la acción de la gravedad una partícula se mueve entre los extremos de un túnel muy estrecho que atraviesa nuestro planeta entre dos puntos cualesquiera de su superficie (no necesariamente pasando por el centro).

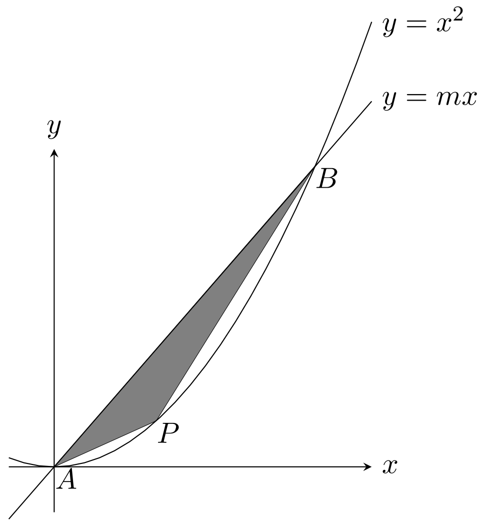
Despreciando el efecto de la rotación terrestre y cualquier tipo de rozamiento, mostrar que el cuerpo realiza movimiento oscilatorio armónico, y encontrar su frecuencia. Considerar que la aceleración de la gravedad en la superficie de la tierra es 9,8 m/s^2.

Problema 5

Desde un puerto marítimo, durante la mañana de un día con mar calmo y sin viento, el encargado de la estación mareológica nota que a gran distancia sobre el mar se desata una fuerte tormenta eléctrica. La tormenta, sin embargo, dura unos pocos minutos y luego se disipa. Esa tarde, a las 14:00 horas, se observa que desde la dirección de la tormenta llegan al puerto olas de 12 metros de longitud de onda. A las 15:40 la longitud de onda ha disminuido a 6 metros, y a las 18:00 es de 3 metros.

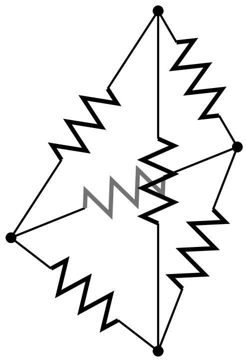
Se sabe que la velocidad v de las olas depende de su longitud de onda λ según la relación $v(\lambda) = A\lambda^\gamma$, donde A y γ son constantes ($\gamma > 0$). En base a las mediciones reportadas, estimar el valor del exponente γ. ¿Aproximadamente a qué hora se produjo la tormenta?

Problema 6



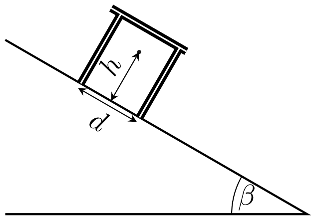
La recta de ecuación $y = mx$ con $m > 0$ interseca a la parábola $y = x^2$ en los puntos A y B, como se muestra en la figura. Encontrar el punto P, sobre el arco de parábola determinado por A y B, que maximiza el área del triángulo APB.

Problema 7



Considerar seis resistencias iguales, de valor R, conectadas de tal manera que forman un tetraedro como muestra la figura. Calcular la resistencia equivalente entre dos vértices cualesquiera del tetraedro.

Problema 8



Un banquito se encuentra en reposo sobre una pendiente de ángulo β. Sus patas están separadas por una distancia d y su centro de masa se encuentra equidistante de ambas, a altura h. El coeficiente de rozamiento estático entre las patas y la superficie de la pendiente es μ.

1. ¿Cuál es la pendiente máxima para que el banquito no deslice?
2. ¿Cuál es la pendiente máxima para que el banquito no vuelque?
3. ¿Qué condición debe cumplirse para que, al aumentar el ángulo de la pendiente, el banquito vuelque y no deslice?

Problema 9

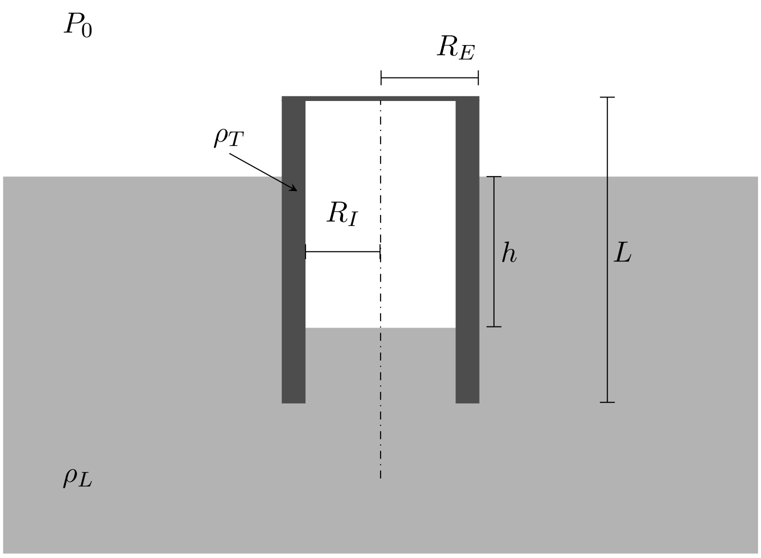
Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, se define

$$I = \int_\gamma \left[(x^3 - 3xy^2 + 2 + xy)dx - (3x^2y - y^2 - \tau x^2)dy \right],$$

donde $\tau \in \mathbb{R}$ es una constante y γ es una curva C^1 en $\mathbb{R}^2$ que comienza en $(0,0)$ y termina en (x_0, y_0).

1. Hallar un valor de τ tal que el valor de I para un (x_0, y_0) fijo no dependa de la curva γ elegida.
2. Para el valor de τ hallado en el punto anterior, resolver la integral I.

Problema 10

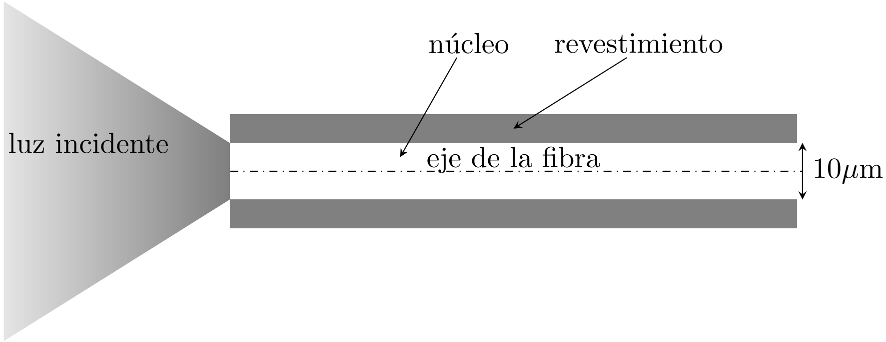


Considerar un tubo cilíndrico de sección circular y longitud L, de radio externo R_E y radio interno R_I, fabricado con un material homogéneo de densidad ρ_T. El tubo se encuentra tapado en su extremo superior, con una tapa de masa despreciable, e inicialmente está lleno de aire a presión atmosférica, P_0. Se introduce en un líquido de densidad ρ_L hasta quedar en equilibrio, como se muestra en la figura.

Se considera que el tubo permanece siempre en posición vertical y que el aire en el interior del tubo es un gas ideal, que mantiene su temperatura durante todo el experimento.

Encontrar la diferencia de alturas h entre los niveles de líquido dentro y fuera del tubo.

Problema 11



La figura muestra un corte longitudinal de una fibra óptica. La luz viaja por un núcleo cilíndrico revestido con otro material, aprovechando el fenómeno de reflexión total interna para propagarse prácticamente sin atenuación. Se desea fabricar una fibra óptica con un núcleo de 10 μm de diámetro. Se dispone de dos materiales A y B, con índices de refracción $n_A = 1,52$ y $n_B = 1,62$. Considerar que la velocidad de la luz en el vacío vale $c = 3 \times 10^8$ m/s.

1. Seleccionar entre estos dos materiales cuál se utilizará para fabricar el núcleo y cuál para el revestimiento.

2. ¿Cuál es el máximo ángulo, medido respecto del eje de la fibra, con el que puede ingresar un rayo de luz y propagarse a lo largo de la misma?

3. ¿Cuáles son las velocidades máxima y mínima a las que puede viajar la señal transmitida por la fibra?

Problema 12

Se desea instalar una planta de generación eléctrica que entregará una potencia de 980 MW, a orillas de un río cuya temperatura, aguas arriba de la planta, es de 12°C y cuyo caudal es de 37 m^3/s. Se supone que la planta se comportará como un ciclo de Carnot ideal, cuya fuente de alta temperatura estará a 352°C. Si el río se utiliza como la fuente fría del ciclo, estimar cuánto aumentará su temperatura al pasar por la planta. El calor específico del agua es $C_a = 4184$ J/kg y su densidad es $\rho_a = 1000$ kg/m^3.
