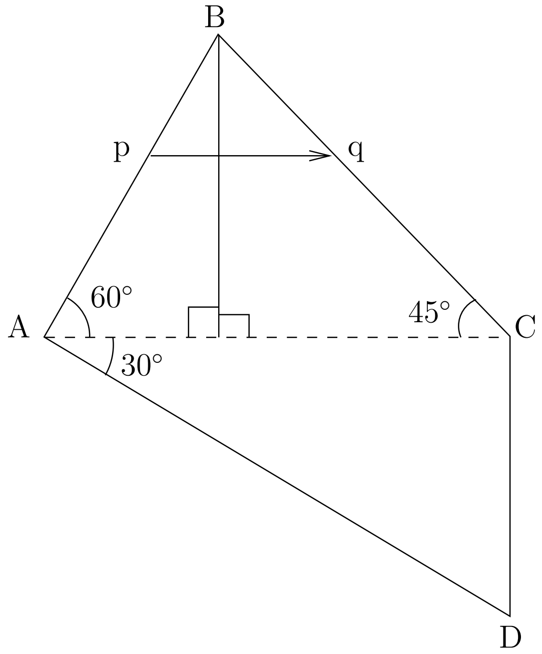
Problema 1

Se tiene un prisma cuya base ABCD se muestra en la figura, construido con un material transparente cuyo índice de refracción es $n = 1{,}56$. El prisma está inmerso en el aire ($n_0 = 1$). Un rayo de luz entra en el prisma por el punto p y sigue la trayectoria pq, marcada por la flecha, que es paralela al segmento $\overline{\mathrm{AC}}$.



1. Dibujar la trayectoria completa del rayo de luz, desde antes de ingresar al prisma (rayo incidente) hasta después de su salida al aire.

2. Calcular el ángulo de desviación entre el rayo incidente y el emergente.

Problema 2

Un famoso resultado de Brook Taylor dice que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que posea n derivadas en x_0 puede escribirse como $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ donde $P_n(x)$ es el conocido Polinomio de Taylor de f centrado en x_0 y $R_n(x)$ es el resto de Taylor. Se conocen varias formas para $R_n(x)$. Por ejemplo, si f tiene $n+1$ derivadas en un intervalo abierto que contiene a x_0 y a x,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

para algún número ξ entre x_0 y x.

En este ejercicio se desea hallar valores aproximados de e^x para valores pequeños de x.

1. Aproximar e^x por un polinomio de Taylor $P(x)$ centrado en $x_0 = 0$, de manera tal que al aproximar e^x por $P(x)$ para cualquier x entre 0 y 0,5 el error cometido sea inferior a 0,01.

2. Probar que $P(x)$ satisface la condición pedida sobre el error.

3. Utilizando $P(x)$, hallar $\mathrm{e}^{0,2}$ con error menor que 0,01.

4. En base a la estimación del error hallada en los puntos anteriores, ¿puede afirmarse que las dos primeras cifras después de la coma en la aproximación de $\mathrm{e}^{0,2}$ hallada en el punto anterior son correctas?

Problema 3

Un bloque pequeño está apoyado en el punto más alto de una esfera fija al suelo. La esfera tiene 1 m de diámetro. El bloque comienza a deslizar sin rozamiento sobre la superficie de la esfera, con velocidad inicial despreciable. Calcular la distancia entre el punto de apoyo de la esfera y el punto en donde el bloque toca el suelo. La aceleración de la gravedad es $g = 9{,}8$ m/s^2.

Problema 4

Se desea construir un generador para alimentar la línea eléctrica domiciliaria argentina, de 220 V y 50 Hz, mediante una espira conductora giratoria inmersa en el campo magnético terrestre ($\approx 0{,}5$ gauss $= 5 \times 10^{-5}$ tesla $= 5 \times 10^{-5}$ V s/m^2).

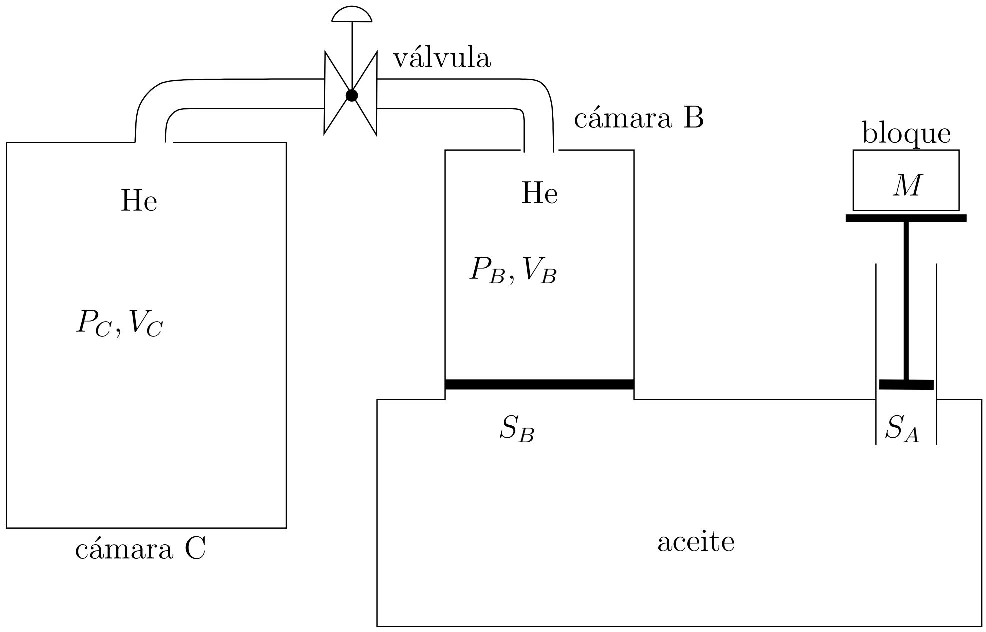
1. ¿Cómo conviene orientar el eje de rotación de la espira?
2. Suponiendo que la espira tiene forma circular, ¿cuál debe ser su diámetro?
3. ¿Sería posible reemplazar la espira por un conjunto de espiras más pequeñas? ¿Cómo deberían conectarse mutuamente?
4. Discutir brevemente las posibilidades prácticas de construir y utilizar este tipo de generador eléctrico.

Problema 5

En $\mathbb{R}^3$, sea S_1 el cilindro sólido dado por $x^2 + z^2 \leq R^2$ y $0 \leq y \leq R$, donde R es una constante positiva. Denotaremos por C_1 a la superficie exterior de S_1 (incluyendo las "tapas"), con la orientación dada por la normal exterior. Además, se define C_2 como la parte de la superficie C_1 que satisface $z \geq 0$, con la misma orientación que C_1. Por último, se tiene el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, z, -2xz + x^2)$.

1. Calcular el flujo de $\mathbf{F}$ sobre la superficie C_2, es decir, hallar $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$.
2. Sin evaluar ninguna integral de superficie, calcular el flujo de $\mathbf{F}$ sobre C_1, justificando cuidadosamente la respuesta.

Problema 6



Una máquina hidráulica consiste en un recipiente completamente lleno de aceite, con dos pistones de secciones $S_A = 10$ cm^2 y $S_B = 40$ cm^2, como muestra la figura. Inicialmente, los dos pistones se encuentran al mismo nivel. El primer pistón sostiene un bloque de masa M, y el segundo comprime una cámara (B) que contiene gas helio a 120 kPa. Esta cámara está unida a otra cámara (C) a través de un tubo de volumen despreciable que posee una válvula, inicialmente cerrada. La cámara C también contiene helio, pero a una presión de 140 kPa. El volumen de la cámara C es de 2 litros, mientras que el gas en la cámara B ocupa inicialmente 1 litro.

Puede considerarse que el aceite es un líquido incompresible, de 920 kg/m^3 de densidad. El helio es un gas ideal, y todo el sistema se encuentra a la misma temperatura. La aceleración de la gravedad es 9,8 m/s^2.

1. Al abrir la válvula, ¿cuánto sube el bloque respecto de su nivel inicial?
2. Determinar el trabajo realizado sobre el bloque. ¿Qué componente del sistema suministró dicha energía?

Problema 7

Usualmente, en los bares se calienta leche utilizando vapor de agua a alta presión, disponible en las máquinas para elaborar café *espresso*. Se hace burbujear el vapor en la leche a través de una boquilla produciéndose, además del calentamiento, gran agitación y mucha espuma. El método es rápido, y la masa de líquido en el recipiente aumenta muy poco. ¿Cuáles son los mecanismos físicos que causan el calentamiento? ¿Cuál es el más relevante? ¿Por qué?

Problema 8

Un péndulo de longitud l y masa m cuelga del techo de un vagón que desliza sin fricción sobre una rampa inclinada. La rampa forma un ángulo α con la horizontal.

1. ¿Cuál es la dirección de la posición de equilibrio de la cuerda del péndulo?
2. ¿Cuál es el período de oscilación del péndulo cuando realiza oscilaciones de amplitud pequeña?

Problema 9

Sean L_1 la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $(1,1,1)$ con dirección $(1,1,2)$ y M_1 el plano ortogonal a L_1 que contiene al punto $(2,-2,-1)$.

1. Hallar $L_1 \cap M_1$. Decidir si se trata del conjunto vacío, un punto, una recta o un plano.
2. Si L_2 es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(0,2,1)$ y $(2,0,1)$, hallar la ecuación del plano M_2 que contiene a L_1 y L_2.
3. Decidir si el conjunto $M_1 \cap M_2$ es vacío, una recta o un plano en $\mathbb{R}^3$. Si se trata de una recta, dar su dirección y un punto por el que pase. Si se trata de un plano, dar un vector normal al mismo y un punto contenido en él.
4. Sea L_2' la recta paralela a L_2 que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$. Hallar la menor distancia entre puntos de L_1 y puntos de L_2'. ¿Qué puntos de las rectas se encuentran a esta distancia?

Problema 10

Cuando una cuerda elástica se estira una longitud Δx respecto de su longitud natural, ejerce en sus puntas una fuerza proporcional a Δx, dirigida a lo largo de la cuerda. En cambio, si sus extremos están a una distancia menor o igual que la longitud natural, la fuerza ejercida es nula.

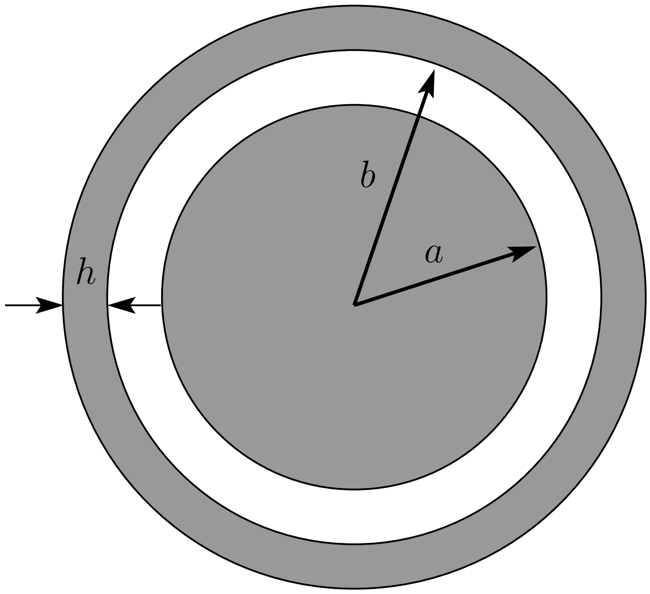
En presencia de la gravedad, se cuelga un cuerpo de masa m de una cuerda elástica sin masa como la descripta arriba, y se le imprime cierta velocidad en la dirección vertical de modo que comienza a oscilar. Se observa que, cuando la amplitud de las oscilaciones es suficientemente grande, la frecuencia es prácticamente independiente de la masa del cuerpo. A medida que la amplitud decrece, en cambio, la dependencia con la masa del cuerpo se hace cada vez más apreciable. Explicar esta observación.

Problema 11

Un depósito de mercadería acepta almacenar cajas cuyo largo más dos veces el ancho más tres veces el alto no supere los 12 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de las cajas de mayor volumen que se pueden almacenar en ese depósito? Justificar cuidadosamente la respuesta.

Problema 12

Se tiene un sistema formado por una esfera y un cascarón esférico concéntricos, como muestra la figura. Ambos son de material conductor y están en el vacío. La esfera tiene radio a y carga eléctrica Q_1. El cascarón tiene radio interno b, espesor h, y carga eléctrica Q_2.



1. Calcular el campo electrostático en todo el espacio, y graficarlo como función de la distancia al centro de la esfera.

2. Determinar las densidades de carga eléctrica sobre todas las superficies del sistema.

3. Calcular la capacidad eléctrica del sistema.

4. Si se llena el espacio entre la esfera y el cascarón con un material de constante dieléctrica ϵ, ¿se producen cambios en el campo eléctrico? En caso afirmativo, describir los cambios; en caso negativo, explicar por qué.