Índice general

Examen 2008

Problema 1, Mecánica

Una persona parada sobre una balanza de pie se encuentra debajo de un estante. Dicha persona sólo está tocando dicho estante, ejerciendo sobre el mismo una fuerza vertical hacia arriba de $10\,\mathrm{N}$, y en ese mismo momento la balanza marca $121\,\mathrm{kg}$. ¿Cuánto pesa dicha persona?

a) $111\,\mathrm{kg}$

b) $120\,\mathrm{kg}$

c) $121\,\mathrm{kg}$

d) $122\,\mathrm{kg}$

e) $131\,\mathrm{kg}$

Respuesta

Las balanzas miden ”peso” es decir la fuerza que una cierta masa hace contra el piso, o sea que cuando dice 121 Kg mide una fuerza de $F = mg = 120\,\mathrm{Kg}\;\; 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} = 1185{,}8\,\mathrm{N}$. Si a esta fuerza le sumamos la reacción del estante nos dará 1175.8 N, lo que equivale a la fuerza que ejercería un peso de aproximadamente 120 Kg, siendo la respuesta correcta la b).

Problema 2, Mecánica

Se tiene un cilindro de altura $h = 1\,\mathrm{m}$ y base circular de radio $1\,\mathrm{m}$. Cuál de las siguientes afirmaciones describe más apropiadamente el comportamiento del volumen del cilindro si se aumenta r en $10^{-20}\,\mathrm{m}$ y h se disminuye en la misma cantidad?

a) se incrementará en, aproximadamente, $3\pi 10^{-20}\,\mathrm{m}^3$

b) se incrementará en, aproximadamente, $\pi 10^{-20}\,\mathrm{m}^3$

c) se mantendrá constante

d) se disminuirá en, aproximadamente, $\pi 10^{-20}\,\mathrm{m}^3$

e) se disminuirá en, aproximadamente, $3\pi 10^{-40}\,\mathrm{m}^3$

Respuesta

Consideremos el volumen del cilindro

$$V = \pi r^2 \times h,$$

si diferenciamos esta ecuación nos queda que,

$$dV = \pi 2 r dr \times h + \pi r^2 \times dh = \pi r(2drh + dhr).$$

Reemplazando los valores de r, h, dr, y dh nos queda que $dV = \pi \times 10^2 0\,\mathrm{m}^3$, siendo la respuesta correcta la b)

Problema 3, Calor

La Garganta del Diablo en las Cataratas del Iguazú tiene una altura promedio de $80\,\mathrm{m}$. ?Cuánto sería de esperar que cambie la temperatura del agua después de la caída?

a) $1{,}9°\mathrm{C}$

b) $0{,}19°\mathrm{C}$

c) $0{,}019°\mathrm{C}$

d) $0°\mathrm{C}$

e) $-0{,}019°\mathrm{C}$

Respuesta

Este es un problema de conservación de la energía. Pensemos en una masa agua m que cae desde una altura h en donde se detiene completamente. Toda la energía potencial,

$$E_P = mgh,$$

transformándose en calor. Ese calor $Q = E_P$, elevara la temperatura de esa masa de agua una cierta cantidad ΔT. Este valor debe ser tal que cumpla que

$$Q = mc\Delta T,$$

donde c es calor especifico del agua (por definición de caloría 1 cal/gC°. Solo queda conocer el equivalente mecánico del calor 1 cal = 4.18 Joule. Conociendo esto se calcula,

$$\Delta T = gh/c,$$

es decir 0.187 C° por lo que la respuesta correcta es la b).

Problema 4, Problemas de Fermi

¿Puede estimar la masa del protón?

a) No se puede

b) 10^{-27} kg

c) 10^{-29} kg

d) 10^{-31} kg

e) 10^{-33} kg

Respuesta

Si te acordas del peso molecular de algo, que se yo del hidrógeno que mas o menos 2, o sea que un mol de moléculas de hidrógeno tiene una masa de 2 gramos, uno puede calcular la masa de un átomo de hidrógeno será,

$$2\,\text{gramos/mol}/6{,}022 \times 10^{23}\text{mol}^{-1} = 3{,}32 \times 10^{-27}\,\text{Kg},$$

por lo que la respuesta correcta es la b).

Problema 5, Matemática

Si $a > 0$, el límite $\lim_{x\to a}\left(\frac{x}{x-a} - \frac{1}{\ln(x)-\ln(a)}\right)$ vale:

a) -1

b) $-\frac{1}{2}$

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

Respuesta

Este limite es de la forma indeterminada $\infty - \infty$ por lo que probamos usando la regla de l'Hôpital (http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_LHopital):

$$Lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = Lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En nuestro caso particular,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x-a} - \frac{1}{\ln(x)-\ln(a)} = \frac{-a+x+x\ \log(a) - x\ \log(x)}{(-a+x)\ (\log(a)-\log(x))}.$$

Esta forma sin embargo lleva de nuevo a una indeterminados del limite,

$$Lim_{x\to a}\frac{f'x)}{g'(x)},$$

por lo que hay que volver a aplicar el método evaluando el limite,

$$Lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Conociendo $f(x)$ y $g(x)$ y evaluando la derivada segunda de estas funciones nos queda

$$Lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} = Lim_{x\to a}\frac{x}{x+a} = \frac{1}{2}.$$

De esta forma la respuesta correcta es la d).

Problema 6, Circuitos

En el circuito que muestra la figura, en el cual todos los capacitores están inicialmente descargados, la llave de contacto L_1 se cierra por un tiempo suficiente hasta que no circulen más corrientes. Luego de eso se vuelve a abrir. Al cabo de un tiempo suficiente en que hayan pasado todos los transitorios: ¿con qué carga, en μC, queda cada uno de los capacitores? Parámetros: fuente de tensión $V = 15\,\mathrm{V}$, capacitancias: $C_1 = 3\,\mu\mathrm{F}$, $C_2 = 3\,\mu\mathrm{F}$, $C_3 = 6\,\mu\mathrm{F}$, resistencias $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\Omega$.

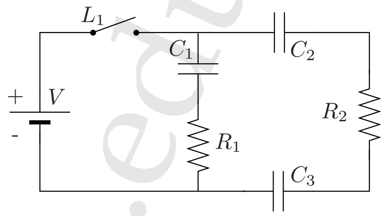
a) $q_{C_1} = 45{,}0$, $q_{C_2} = 30{,}0$, $q_{C_3} = 30{,}0$

b) $q_{C_1} = 37{,}5$, $q_{C_2} = 37{,}5$, $q_{C_3} = 37{,}5$

c) $q_{C_1} = 45{,}0$, $q_{C_2} = 60{,}0$, $q_{C_3} = 30{,}0$

d) $q_{C_1} = 45{,}0$, $q_{C_2} = 30{,}0$, $q_{C_3} = 60{,}0$

e) $q_{C_1} = 45{,}0$, $q_{C_2} = 0{,}0$, $q_{C_3} = 75{,}0$



Respuesta

Pensemos un poco en este problema. Una vez que ha pasado un cierto tiempo los capacitarles se cargan y cesan las corrientes. A corriente cero es como si las resistencias desaparecieran, Por definición de capacidad C se cumple la relación $V = Cq$ donde V es la tensión y q la carga del capacitor respectivamente. Miremos la rama del circuito mas cercana a la batería. Podemos escribir que

$$V = q_{C1}/C_1.$$

En la otra rama podemos escribir que

$$V = q_{C2}/C_2 + q_{C3}/C_3.$$

En particular si el sistema esta descargado al principio del experimento ambas cargas deben ser iguales $q_{C2} = q_{C3}$. Teniendo esto en cuanta podemos calcular que $q_{C1} = 45{,}0\,\mu\mathrm{F}$, $q_{C2} = q_{C3} = 30\,\mu\mathrm{F}$ por lo que la respuesta correcta es la a).

Problema 7, Ondas

Los submarinos utilizan señales sonoras de $1000\,\mathrm{Hz}$ que son escuchados por otros submarinos para evitar colisiones. Un submarino que viaja a $5\,\mathrm{m/s}$ detecta la señal anti-colisión de otro submarino que se encuentra delante suyo siguiendo su mismo curso, con una frecuencia de $1005\,\mathrm{Hz}$. Si hay un observador situado en tierra firme detrás del primer submarino y sobre la misma trayectoria de los mismos, podemos concluir que el segundo submarino: (la velocidad del sonido en el agua es de $1500\,\mathrm{m/s}$)

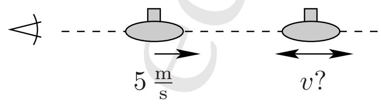
a) se aleja del observador a $7{,}5\,\mathrm{m/s}$

b) se acerca al observador a $7{,}5\,\mathrm{m/s}$

c) se aleja del observador a $2{,}5\,\mathrm{m/s}$

d) se acerca al observador a $2{,}5\,\mathrm{m/s}$

e) se encuentra quieto



Respuesta

Por alguna razón siempre aparecen problemas que incluyen el efecto Doopler (http://es.wikipedia.org/wiki/Efecto_Doppler). Acordemonos de la formulita aproximada del efecto Doopler, ie.

$$f' = f \times \left(1 \pm \frac{v_{E,O}}{v_S}\right),$$

donde f' es la frecuencia escuchada, f la referencia real del emisor, $v_{E,O}$ es la velocidad del emisor o del observador, y v_S la velocidad del sonido en el medio. La elección del signo tal que si emisor y observador se acercan la frecuencia aumente. Además debemos recordar que esta aproximaciones es solo valida en el caso del que $v_{E,O} \ll v_S$.

Vamos a nuestro ejercicio, la frecuencia aumenta de 1000 a 1005 Hz por lo que concluimos que ambos submarinos se están acercando.Al aplicar la ecuación anterior calculamos que la velocidad relativa es de aproximadamente 7.5 m/s. De ello podemos concluir que el submarino se mueve a 2.5 m/s acercándose al observador por lo que la respuesta correcta es la d).

Problema 8, Matemática

Cuál de los siguientes números complejos es una raíz cuarta de -1? (Nota: $i^2 = -1$)

a) $-1 + \cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4})$

b) $\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8})$

c) $\cos(\frac{\pi}{16}) - i\sin(\frac{\pi}{16})$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

e) $\sqrt{2}(1 + i)$

Respuesta

Escribamos en forma polar $-1 = \exp(i\pi)$ por lo que queremos numeros tal que $\exp(ia)^4 = \exp(i\pi)$. Para esto debemos satisfacer que $4a = \pi + 2\pi N$ o lo que es lo mismo $a = \pi/4 + NPi/2$. Esto es $a = 1/4\pi, 3/4\pi, 5/4\pi, 7/4\pi$. Evaluando esta expresión se puede ver que la respuesta correcta es la d).

Problema 9, Óptica

En la figura se muestra la sección transversal de un prisma de material transparente sobre el cual incide un rayo de luz α perpendicular a la cara generada por la arista BC del triángulo. Una parte de él sale en la dirección β paralelo al rayo incidente. Ambos están separados por una distancia $d = 7\,\text{cm}$. El triángulo ABC es equilátero de $12\,\text{cm}$ de lado. ¿Cuál es entonces el índice de refracción del material transparente?

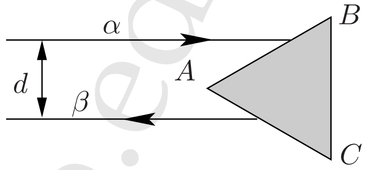
a) 1,21

b) 1,38

c) 1,47

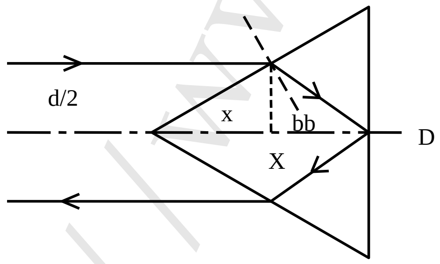
d) 2,41

e) No se puede determinar porque faltan datos



Respuesta

Mucha geometría para poca óptica. Pensemos la marcha de rayos: el rayo incidente entra al prisma se refracta, se refleja en la cara posterior, vuelva a retractarse y sale paralelo. Para que esto ocurra la reflección tiene que ocurrir en el centro de la cara posterior.



Una ves encontrado esto tenemos los ángulos de incidencia y refracción y podemos sacar el índice ce refracción según la ley de Sneel (http://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Snell):

$$\frac{sen(\theta_{in})}{sen(\theta_{ref})} = n.$$

Miremos la figura:

$$x = (d/2)/tan(30\,°) = 6{,}06\,\text{cm},$$

$$X = (D/2)/tan(30\,°) = 10{,}39\,\text{cm},$$

$$\tan(bb) = (X - x)/(d/2) = 0{,}808\,\text{cm},$$

por lo que

$$bb = 51{,}05\,°.$$

Por lo que $\theta_{in} = 60\,°$, y $\theta_{ref} = 21{,}05\,°$ o sea que $\sin(a)/\sin(b) = 2{,}41$ por lo que la respuesta correcta es d).

Problema 10, Mecánica

Un globo aerostático sube a una velocidad de $3\,\mathrm{m/s}$. Se deja caer una bolsa de arena de $4\,\mathrm{kg}$ que tarda en llegar a tierra $8\,\mathrm{s}$ sin alterar el movimiento del globo. ¿Cuál es la altura del globo en el momento en que la bolsa de arena toca la tierra?

a) $265{,}6\,\mathrm{m}$

b) $289{,}6\,\mathrm{m}$

c) $313{,}6\,\mathrm{m}$

d) $337{,}6\,\mathrm{m}$

e) $627{,}2\,\mathrm{m}$

Respuesta

Planteamos la caída de la bolsa de lastre,

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

En nuestro caso particular sabemos sabemos que $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$, $a = -9{,}8\,\mathrm{m/s}^2$ y que después de $t = 8\,\mathrm{s}$ la bolsa llega a $x = 0$. Teniendo esto en cuenta podemos concluir que la caída empieza desde una altura de $x_0 = 289{,}6\,\mathrm{m}$. Sin embargo mientras la bolsa cae el globo sigue subiendo a 3 m/s^2 por lo que en el momento del impacto se encuentra a una altura de 289.6 m + 24 m = 313.6 m por lo que la respuesta correcta es c).

Problema 11, Matemática

Un recipiente tiene la forma de una superficie generada al rotar alrededor del eje z (vertical) la curva $z = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$.
Si las longitudes se miden en m: ¿Cuál es el mayor volumen de líquido, medido en m^3, que puede contener este recipiente?

a) π

b) $\frac{\pi}{2}$

c) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{5} - 1)$

d) $\frac{\pi}{8}(\sqrt{5} - \ln(5))$

e) infinito

Respuesta

Queremos encontrar el volumen de revolución generado por la curva $y = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$. Planteamos el elemento de volumen,

$$dV = 2\pi x \times y\, dx = 2\pi x \times x^2\, dx$$

por lo que integrando sabemos que $V = \pi/2\ x^4 = \pi/2$, por lo que la respuesta correcta es b).

Problema 12, Calor

Al poner en contacto térmico un sistema A con otro B se produce una transformación reversible. ¿Cuál afirmación es SIEMPRE correcta?

a) La transformación es isotérmica o adiabática.

b) La entropía del universo aumenta.

c) La entropía del universo no cambia.

d) La entropía del sistema A disminuye.

e) La energía total disminuye.

Respuesta

Dogma de fe: "*Si es reversible no cambia la entropía, si no cambia la entropía es reversible*", por lo que la respuesta correcta es c). Amen...

Problema 13, Mecanica

Una barra uniforme AB de $4\,\mathrm{m}$ de longitud y $12\,\mathrm{kg}$ de peso, está sujeta en el extremo B por una cuerda. La barra flota como indica la figura, con la mitad de su longitud sumergida. La tensión T de la cuerda y el volumen total V de la barra son:

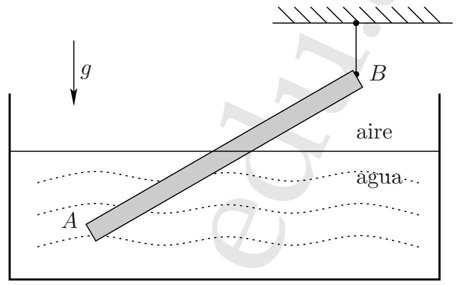
a) $T = 2\,\mathrm{kg}$, $V = 0{,}016\,\mathrm{m}^3$

b) $T = 4\,\mathrm{kg}$, $V = 0{,}016\,\mathrm{m}^3$

c) $T = 2\,\mathrm{kg}$, $V = 0{,}032\,\mathrm{m}^3$

d) $T = 4\,\mathrm{kg}$, $V = 0{,}032\,\mathrm{m}^3$

e) Los datos son insuficientes para realizar el cálculo.



Respuesta

Una vez mas un problema con el principio de Arquímedes (http://es.wikipedia.org/wiki/Principio_de_Arquimedes). Plantemos las fuerzas sobre la barra en la dirección vertical,

$$\frac{1}{2} V \rho_a g - mg + T = 0.$$

El primer termino es el peso del fluido desalojado ($\rho_a = 1000\,\mathrm{Kg/m^3}$), mg el peso de la barra, y T la tensión de la cuerda. Haciendo la cuentitas se se que la respuesta correcta es, Eureka, la b).

Problema 14, Matemática

Se tienen los siguientes vectores de R^4:

$$v_1 = (1, 1, -1, 2)$$
$$v_2 = (-1, 1, -1, 1)$$
$$v_3 = (\alpha, \alpha, \alpha^2, 1)$$

Si S es el subespacio de R^4 generado por v_1, v_2 y v_3, la menor dimensión de S que puede obtenerse variando α es:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Respuesta

L a dimensión del subespacio S es la dimensión de la base formada por (v_1, v_2, v_3). Por lo tanto el problema se reduce a encontrar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como α es variable, el rango de la matriz puede ser menor que 3 si para algún valor de α, la fila resultante es linealmente dependiente de las otras dos.

Pero no hay valor de α que haga a la tercera fila linealmente dependiente de las otras dos, por lo tanto, la menor dimensión que puede generar la matriz es 3.

Respuesta 'd)'.

Problema 15, Electromagnetismo

En cada uno de los vértices de un triángulo equilátero de $30\,cm$ de lado se encuentran cargas eléctricas. En el vértice C, que posee una carga eléctrica $q_C = +4\,\mu C$, se ejerce una fuerza $F = 10\,N$ debida a las otras cargas eléctricas, con una dirección paralela al lado opuesto del triángulo en sentido hacia arriba, como se muestra en la figura. Cuál es el valor de las restantes dos cargas? La permitividad del medio es $8{,}86 \times 10^{-12}\,F/m$.

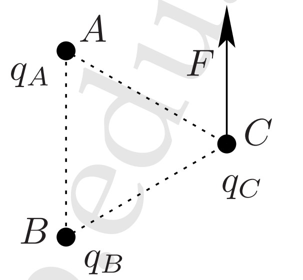
a) $q_A = -2{,}5\,\mu\mathrm{C}$, $q_B = +5{,}0\,\mu\mathrm{C}$

b) $q_A = -0{,}5\,\mu\mathrm{C}$, $q_B = -0{,}5\,\mu\mathrm{C}$

c) $q_A = -50{,}0\,\mu\mathrm{C}$, $q_B = +50{,}0\,\mu\mathrm{C}$

d) $q_A = -2{,}5\,\mu\mathrm{C}$, $q_B = +2{,}5\,\mu\mathrm{C}$

e) $q_A = +2{,}5\,\mu\mathrm{C}$, $q_B = -2{,}5\,\mu\mathrm{C}$



Respuesta

E studiemos un poco el problema concentrándonos en el signo de las cargas. Si queremos que la fuerza horizontal sea nula, una de las cargas debe tirar mientras que la otra debe empujar, o sea $q_A = -q_B$. Ahora bien, si queremos que la fuerza vertical sea positiva (o sea hacia arriba) $q_A \times q_C < 0$ o lo que es lo mismo $q_B \times q_C > 0$.

Veamos ahora los valores de las fuerzas

$$F_{AC} = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_A q_C}{d^2}$$

mientras que

$$F_{BC} = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_B q_C}{d^2}.$$

En particular la suma de las componetes de ambas en la dirección vertical es

$$F_y = F_{AC}\sin(30) - F_{AB}\sin(30),$$

o sea

$$F_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\sin(30)}{d^2}\left(q_A q_C - q_B q_C\right).$$

Remplazando valores obtenemos,

$$q_A = -F_y \times \frac{4\pi\epsilon d^2}{2\sin(30) q_C} = -25\,\mu C,$$

y

$$q_B = -q_A = +25\,\mu C.$$

Por lo que la respuesta correcta es la d) (salvo un factor 10, Ops!).

Problema 16, Mecánica

Una partícula de masa m recorre una trayectoria circular de radio R, sujeta a un dispositivo de masa despreciable. La partícula realiza su recorrido a velocidad angular ω, apoyada sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Si mediante el dispositivo se cambia el radio de la trayectoria a la mitad del valor inicial, la velocidad angular final será:

a) $\frac{\omega}{4}$

b) $\frac{\omega}{2}$

c) ω

d) 2ω

e) 4ω

Pista

P ara conocer la velocidad angular final necesitamos valernos de algún principio de conservación que vincule los estados inicial y final del sistema.
El principio de conservación de la energía no es sencillamente aplicable. Se debe a que durante la disminución del radio el *dispositivo de masa despreciable* realizará trabajo sobre el sistema (venciendo la fuerza centrífuga) y su energía variará. Aunque el trabajo necesario para disminuir el radio se puede calcular y resolver el problema por conservación de energía, resulta más sencillo aplicar el principio de conservación de **momento angular**.

Respuesta

A plicando el principio de conservación de momento angular, $I_1\,\omega_1 = I_2\,\omega_2$, siendo $I = m\,R^2$, se obtiene:

$$m\,R_1^2\,\omega_1 = m\,R_2^2\,\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1(\frac{R_1}{R_2})^2 \Rightarrow \omega_2 = 4\,\omega_1$$

La respuesta correcta entonces es 'e)'.

Problema 17, Cálculo

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene *período* $T > 0$ si $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?

a) $f'(x)$ tiene período T para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable y de período T.

b) $\operatorname{sen}(f(x))$ tiene período T para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y de período T.

c) $\int_0^x f(s)ds$ tiene período T para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y de período T.

d) $3f(x) - 2$ tiene período T para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y de período T.

e) $f(2x)$ tiene período T para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y de período T.

Respuesta

L a definición de función $T-$periódica de arriba es clave. Utilicémosla para analizar punto por punto.

a) En este punto la función f es diferenciable. O sea que además de tomar el mismo valor $f(x)$ cada T, $f(x+T) = f(x)$, recorre los valores suavemente, sin quiebres ni saltos. Entonces, si pasa exactamente por los mismos valores, lo hace con las mismas pendientes. La derivada de $f(x)$ también es periódica. **Verdadera**.

b) Ya que $f(x+T) = f(x) \Rightarrow sen[f(x+T)] = sen[f(x)]$. Entonces $sen[f(x)]$ también es periódica, como lo sería cualquier otra función $g[f(x)]$ gracias a la periodicidad de $f(x)$. **Verdadera**.

c) $\int_0^x f(s)ds$, recordemos, es el área bajo la curva de $f(s)$ en el intervalo $[0, x]$. Por lo tanto, basta imaginar una función periódica que sólo tome valores positivos (por decir algo, $sen(x) + 5$) y ver que el área que representa la integral es un valor monótonamente creciente, nunca vuelve al mismo valor después de recorrer T. Por lo tanto esta afirmación no es siempre verdadera. Es **falsa**

d) $3f(x+T) - 2$, por la periodicidad de $f(x)$, es igual a $3f(x) - 2$. Por lo tanto también es periódica. **Verdadera**.

e) Si a $f(2x)$ la desplazamos $T/2$, obtenemos $f[2(x+T/2)] = f(2x+T) = f(2x)$, gracias a la periodicidad de $f(x)$. Entonces $f(2x)$ tiene período $T/2$. Esta función toma el mismo valor al ser desplazada una cantidad T (cumple dos períodos), por lo tanto es también $T-$periódica según la definición de arriba. **Verdadera**.

La afirmación falsa que se busca es la 'c)'.

Problema 18, Electricidad

La figura muestra un circuito con un capacitor C, una inductancia L, una fuente de tensión continua V y un amperímetro A. Todos los componentes son "ideales" (sin resistencias internas). Inicialmente el amperímetro está desconectado, el capacitor descargado y no circula corriente por el circuito. A tiempo $t = 0$ se conecta el amperímetro. ¿Cuál de las siguientes expresiones describe mejor la corriente que medirá el amperímetro? (c_1 y c_2 son constantes positivas)

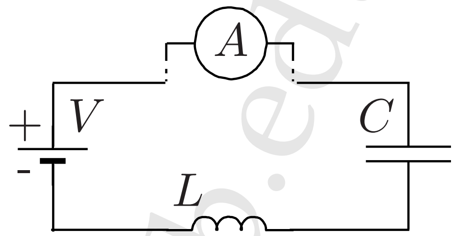
a) $c_1 \,\mathrm{sen}(c_2 t)$

b) $c_1 \cos(c_2 t)$

c) $c_1 e^{-c_2 t}$

d) $c_1(1 - e^{-c_2 t})$

e) $c_1(1 - \cos(c_2 t))$



Con Cuentas

P ara encontrar la expresión de la corriente en función del tiempo apliquemos la segunda ley de *Kirchoff*. $V_{fuente} = V_{inductancia} + V_{capacitor}$.
En la inductancia, $V_{inductancia} = L\,\frac{\partial i}{\partial t}$, siendo L el valor de la inductacia.
En el capacitor, $V_{capacitor} = Q/C = \int_0^t \frac{i}{C}\mathrm{d}t$. Siendo C la capacidad del capacitor
La tensión, un escalón que inicialmente es cero y luego salta a V_f cuando el amperímetro se conecta, es

$$V_f = \sum_{n=0}^{\infty}\{\frac{(-1)^n}{(2\,n+1)\pi}cos[(n+\frac{1}{2})t] + \frac{1}{(2\,n+1)\pi}sen[(2\,n+1)t] + \frac{1}{(2\,n+1)\pi}sen[(n+\frac{1}{2})t]\}$$

Ésta es la expansión en serie de Fourier del escalón (escalón representado entre $-\pi$ y π, pero representando el escalón en otro rango el resultado es similar).
La ecuación queda

$$L\,\frac{\partial i}{\partial t} + \int_0^t \frac{i}{C}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\{\frac{(-1)^n}{(2\,n+1)\pi}cos[(n+\frac{1}{2})t] + \frac{1}{(2\,n+1)\pi}sen[(2\,n+1)t] + \frac{1}{(2\,n+1)\pi}sen[(n+\frac{1}{2})t]\}$$

que derivando respecto de t queda la ecuación de $i(t)$ que buscamos...

$$\frac{i}{C} + L\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\{\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi}sen[(n+\frac{1}{2})t] + \frac{1}{\pi}cos[(2\,n+1)t] + \frac{1}{\pi}cos[(n+\frac{1}{2})t]\}$$

La solución homogénea de esta ecuación es $i_h = A\,sen(t/\sqrt{LC}) + B\,cos(t/\sqrt{LC})$.
La solución particular es $i_p = \sum_{n=0}^{\infty}\{A_n sen(\alpha_n t) + B_n cos(\beta_n t) + B_n cos(\gamma_n t)\}$
La solución general es $i(t) = i_h + i_p$.
Como condición inicial se pide: $i(t=0) = 0$. Sin esta condición, una discontinuidad en el valor de corriente (ya que a $t < 0$, $i = 0$) llevaría a una tensión infinita en la bobina (derivada infinita de $i(t=0)$). $i(t)$ debe ser continua y derivable en $t = 0$.
Esta condición inicial anula los coeficientes B, B_n, dejando sólo los términos con $sen()$:

$$i(t) = A\,sen(\frac{t}{\sqrt{LC}}) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n sen(\alpha_n t)$$

En este punto ya estamos en condiciones, sin conocer el valor de los coeficientes A, A_n y α_n, de ver que *la expresión que mejor describe la corriente que medirá el amperímetro* es $c_1 \operatorname{sen}(c_2 t)$. Respuesta 'a)'.

Sin Cuentas

D ado que la resolución *Con Cuentas* lleva bastante más que 3 ó 4 minutos, veamos cómo se puede llegar a la misma solución *Sin Cuentas*.
El dato clave es la condición de contorno de la solución *Con Cuentas*, la corriente a $t = 0^+$ es nula, $i(t)$ es continua y derivable en $t = 0$. Sin esta condición, una discontinuidad en el valor de corriente (ya que a $t < 0$, $i = 0$) llevaría a una tensión infinita en la bobina (derivada infinita de $i(t = 0)$)Con esta condición podemos descartar las soluciones 'b)' y 'c)', ambas valen 1 en $t = 0$.
Por otro lado, sin bien el sistema tiene capacidad de almacenar carga, esta capacidad es finita, y la corriente $i(t)$ no podría tener el mismo sentido indefinidamente, debería alternar entre valores positivos y negativos. Con esta condición podemos descartar las soluciones 'd)' y 'e)', ya que ambas son siempre positivas.
Después del descarte, la única solución posible es la 'a)'.

Problema 19, Ondas

Dos osciladores de radio generan idénticas señales de frecuencia 30 MHz. Las ondas de radio idénticas se propagan desde cada antena de igual manera en todas sus direcciones. Sobre puntos de un círculo de radio 30 km centrado en el punto medio entre ambas antenas emisoras las señales máximas son recibidas solamente sobre las direcciones Norte-Sur y Este-Oeste, y las señales mínimas sobre líneas haciendo ángulos de 30° con la dirección Norte-Sur. ¿A cuántos metros están separadas las antenas y sobre qué dirección?

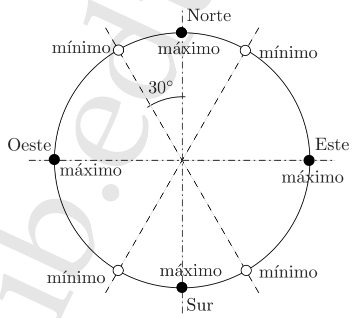
a) a 10 m sobre la dirección Norte-Sur

b) a 30 m sobre la dirección Este-Oeste

c) a 30 m sobre la dirección Norte-Sur

d) a 10 m sobre la dirección Este-Oeste

e) ninguna de las anteriores



Pista

Para este problema es necesario simplificar la geometría. Es fundamental considerar paralelas a las rectas que unen el punto de recepción y las dos fuentes de onda. O sea, en cada punto de la circunferencia en el que se quiera medir la intensidad de la señal, la dirección hacia una de las fuentes es paralela a la dirección a la otra fuente. Esto es equivalente a despreciar la separación d entre las fuentes frente al radio de la circunferencia, y es aceptable dado que las posibles separaciones entre las fuentes (opciones 'a)' a 'd)') son al menos 1000 veces más pequeñas que el radio.
Además, dado que ambas fuentes emiten a la misma frecuencia, el desfasaje que presentan en un punto no depende del tiempo, sólo depende de la posición, con lo cual las ondas se pueden representar con una expresión tipo $sen(\lambda\, x)$.
Por último, es necesario asumir que las fuentes emiten con desfasaje nulo.

Respuesta

Con las simplificaciones mencionadas arriba, el desfasaje entre los caminos recorridos por una onda y por otra es $d\,cos(\alpha)$, siendo α el ángulo entre la dirección que une las fuentes y la dirección radial.
La longitud de onda es $\lambda = c/f = \frac{3{,}10^8 m/s}{3{,}10^7 1/s} = 10m$. Entonces para 0 y 90^o el desfasaje es d ó $0m$ respectivamente. Por lo tanto, cualquiera sea la separación entre las fuentes, 10 ó $30m$, en la dirección que une las fuentes y en la dirección normal a ésta, hay un número entero de longitudes de onda de desfasaje y por lo tanto intensidad máxima. O sea la existencia de los máximos no permite encontrar la respuesta correcta, sino la posición del mínimo.
En la posición del mínimo hay un desfasaje de media longitud de onda, o sea $\lambda/2 = 5m = d\,cos(\alpha)$. Esta ecuación se verifica para $d = 10m$ y $\alpha = 60^o$. O sea que las fuentes están separadas $10m$ y el mínimo ocurre en una dirección que forma un ángulo de 60^o con la dirección que une las fuentes.

La respuesta correcta es ’d)’.

Problema 20, Probabilidad

Sólo uno de 1000 adultos contrae una cierta enfermedad rara. Hay un test para diagnosticarla. El test da positivo en la totalidad de los individuos que realmente tienen la enfermedad, mientras que si el individuo no tiene la enfermedad la probabilidad de que el test dé positivo es 2 %. Si Ud. se realiza el test y el resultado es positivo, la probabilidad de que Ud. tenga esta enfermedad es aproximadamente:

a) $0{,}001$

b) $0{,}01$

c) $0{,}02$

d) $0{,}05$

e) $0{,}20$

Respuesta

1 de cada 1000 personas contrae la enfermedad. A esa persona el test le dará positivo porque detecta la totalidad de individuos afectados. De las 999 personas que no contrajeron la enfermedad, el 2 % tendrá un falso positivo, o sea, unas 20 personas (19.98 personas, estrictamente). Entonces, el test dará positivo a 21 personas de las 1000. De estas 21 personas sólo una contrajo la enfermedad, o sea que si el examen da positivo, la probabilidad de estar realmente infectado es $1/21 = 5\,\%$ (1/20.98=4.76, estrictamente).
La respuesta más aproximada es 'd)'.

Problema 21, Mecánica

El $^3\mathrm{He}$ es un isótopo poco frecuente del gas helio, cuyo isótopo más común es el $^4\mathrm{He}$. Suponga que se tiene una mezcla de $^3\mathrm{He}$ -$^4\mathrm{He}$ a presión atmosférica y temperatura ambiente. ¿Cuál es la relación entre las velocidades medias de los átomos de este gas?

a) La misma, ya que están a la misma temperatura.

b) La velocidad promedio de los átomos de $^3\mathrm{He}$ es menor que la de $^4\mathrm{He}$ en un factor 3/4.

c) La velocidad promedio de los átomos de $^3\mathrm{He}$ es mayor que la de $^4\mathrm{He}$ en un factor 4/3.

d) La velocidad promedio de los átomos de $^3\mathrm{He}$ será un 15 % mayor que la del $^4\mathrm{He}$.

e) No hay suficientes datos para resolver el problema.

Respuesta

E l hecho de que los dos isótopos estén mezclados permite suponer que ambos tienen energías cinéticas medias iguales (consecuencia de que la temperatura del gas sea uniforme). Igualando las energías cinéticas... $E_3 = E_4 \Rightarrow \frac{1}{2}m_3\, v_3^2 = \frac{1}{2}m_4\, v_4^2 \Rightarrow \frac{v_3}{v_4} = 1{,}1547$, v_3 es en promedio un 15 % más alta que v_4. Respuesta 'd)'.

Problema 22, Óptica

Se tiene una lente delgada con la cual se puede quemar una hoja de papel concentrando la luz del sol, si se la coloca a unos $10\,\mathrm{cm}$ de distancia. Si ahora se monta la lente en un banco óptico y se pone un objeto a $20\,\mathrm{cm}$ de distancia, la imagen:

a) es real y tiene el doble de tamaño.

b) es real y tiene la mitad de tamaño.

c) es virtual y tiene el mismo tamaño.

d) se forma en el infinito.

e) no es descripta por ninguna de las alternativas anteriores.

Respuesta

A plicando la formulita

$$\frac{1}{D_{ima}} + \frac{1}{D_{obj}} = \frac{1}{foco}$$

y usando la convención $foco > 0$ si la lente es convergente y $D_{ima} > 0$ si está del lado de la lente contrario al objeto:

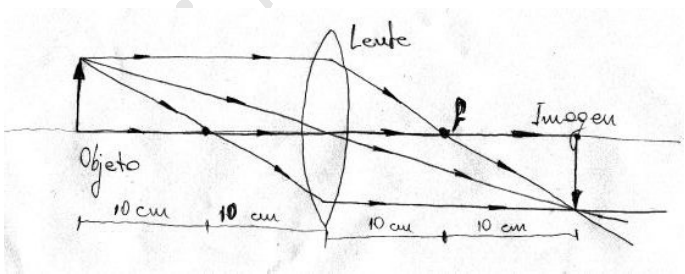
$$\frac{1}{D_{ima}} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} \Rightarrow D_{ima} = 20$$

O sea, la imagen se forma $10cm$ más allá del foco y los rayos no son convergentes, por lo tanto la imagen es virtual. Para conocer el tamaño de la imagen lo mejor es hacer una proyección de los rayos a través de la lente, para lo cual se debe recordar:

- los rayos paralelos al eje pasan por el foco

- los rayos que pasan por el centro de la lente conservan su dirección

- los rayos que pasan por el foco continúan paralelos



Con ésto la imágen se forma invertida y de igual tamaño, por lo tanto, la respuesta correcta es 'c)'.

Problema 23, Matemática

La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ y se sabe que:

$$f(1,2) = 2, \quad \nabla f(1,2) = (-1,3), \quad \nabla f(2,2) = (3,-5).$$

Si se define $g(x,y) = f(f(x,y), xy)$, entonces $\frac{dg}{dx}(1,2)$ vale:

a) -3

b) -5

c) -8

d) -10

e) -13

Respuesta

D erivando con la regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{df(f(x,y),xy)}{dx}\Big|_{(1,2)} = \frac{\partial f(f(x,y),xy)}{\partial f(x,y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(1,2)} + \frac{\partial f(f(x,y),xy)}{\partial xy} \frac{\partial xy}{\partial x}\Big|_{(1,2)}$$

Sabiendo del enunciado que $f(1,2) = 2$ y haciendo $u(x,y) = f(x,y)$ y $v(x,y)\Big|_{(1,2)} = xy\Big|_{(1,2)} = 2$, queda:

$$\frac{df(f(x,y),xy)}{dx}\Big|_{(1,2)} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\Big|_{(2,2)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(1,2)} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\Big|_{(2,2)} \frac{\partial xy}{\partial x}\Big|_{(1,2)}$$

Nuevamente sabiendo del enunciado que $\nabla f(1,2) = (\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(1,2)}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(1,2)}) = (-1,3)$ y $\nabla f(2,2) = (\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(2,2)}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(2,2)}) = (3,-5)$, la expresión queda:

$$\frac{df(f(x,y),xy)}{dx}\Big|_{(1,2)} = (3)\,(-1) + (-5)\,(2) = -13$$

Respuesta 'e)'.

Problema 24, Mecánica

Un objeto de masa M cuelga de un resorte de constante K (de masa despreciable) observándose una longitud de equilibrio l (figura superior). Otro oscilador similar, también de masa M y constante K, se mueve horizontalmente sin fricción (figura inferior). Ambos osciladores están sujetos a la fuerza de gravedad, de aceleración g, que actúa en la dirección vertical. Las frecuencias características de las oscilaciones que se sugieren en la figura dependen:

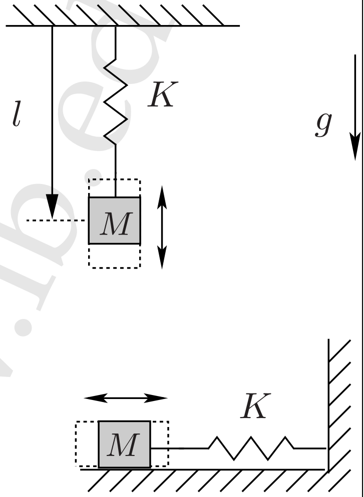
a) sólo de M/K en ambos casos.

b) sólo de la relación g/K en el superior y de M/K en el inferior.

c) sólo de la relación l/g en el superior y de M/K en el inferior.

d) en ambos casos de la elongación inicial y de K.

e) de l/g y de K/M para el caso superior, mientras que en el inferior depende sólo de K/M.



Respuesta

L a ecuación del oscilador armónico es

$$M\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + K\,(x - l_0) = 0$$

El primer término corresponde a la inercia, la oposición de M a adquirir una aceleración empujada por el segundo término, la fuerza ejercida por el resorte como consecuencia de su elongación. l_0 es la elongación de reposo del resorte, que tiene distintos valores para los osciladores de las figuras.
Haciendo un pequeño cambio de variable, trasladando x una distancia l_0, $u = x - l_0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ la ecuación queda

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K\,u = 0$$

de la cual se desprende la solución

$$u(t) = A\,sen(\sqrt{\frac{K}{M}}t) + B\,cos(\sqrt{\frac{K}{M}}t)$$

Volviendo a x,

$$x = u + l_0 = A\,sen(\sqrt{\frac{K}{M}}t) + B\,cos(\sqrt{\frac{K}{M}}t) + \ l_0$$

donde se ve que l_0 no afecta la frecuencia, aunque sí el punto alrededor del cual ocurrirá la oscilación.
La respuesta es por lo tanto 'a)', la frecuencia sólo depende de K y M.

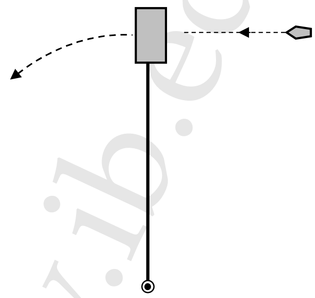
Problema 25, Mecánica

Una bala que se desplaza horizontalmente se incrusta en un bloque de madera inicialmente en reposo. El bloque está sujeto a un eje que le permite rotar en el plano horizontal por medio de una varilla, como se indica en la figura. Como consecuencia del impacto, la varilla comienza a girar alrededor del eje. Dadas las siguientes afirmaciones:

I. El impulso se conserva.

II. La energía cinética se conserva.

III. El impulso angular con respecto al eje se conserva.



a) sólo I es correcta.

b) sólo III es correcta.

c) sólo I y III son correctas.

d) sólo I y II son correctas.

e) todas son correctas.

Pista

L as leyes de conservación de impulso, energía cinética e impulso angular se aplican cuando el sistema en estudio no está sometido a fuerzas externas, disipación de energía o torques externos respectivamente.

Respuesta

E n el instante del choque la bala se incrusta en el bloque de madera. Dado que el enunciado no lo especifica pero es sabido que la bala realizará trabajo de deformación en la madera, no se puede asegurar que la energía cinética se conservará.
En el instante posterior al choque el bloque comenzará a moverse y por estar sujeto al eje comenzará a rotar, para lo cual el eje deberá ejercer la fuerza centrípeta correspondiente. La existencia de esta fuerza hace inaplicable la conservación de impulso lineal. Pero dado que la fuerza pasa a través del eje no ejerce torque, por lo tanto sí se puede aplicar la conservación de impulso angular.
La respuesta correcta es 'b)', sólo el impulso angular con respecto al eje se conserva.

Problema 26, Matemáticas

Las soluciones del sistema de ecuaciones con incógnitas (x, y)

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F \\ Rx + Sy = T \end{cases}$$

dependen de los valores de las constantes reales $A, B, C, D, E, F, R, S, T$.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones ES SIEMPRE FALSA?
La cantidad de soluciones del sistema de ecuaciones puede ser

a) exactamente 0.

b) exactamente 1.

c) exactamente 2.

d) exactamente 3.

e) infinita.

Respuesta

L a segunda ecuación del sistema es lineal, o sea que para cada valor de x existe uno de y (excepto cuando R ó S son nulos, en cuyo caso hay infinitos valores de x (ó y) para cada valor de y (ó x)).
La primera ecuación es de segundo orden con dos incógnitas, pero reemplazando en ella el valor de y (ó x) de la segunda ecuación, se obtiene una ecuación de segundo orden en x (ó y), que se resuelve con la conocida solución general:

$$x = \frac{-b + -\sqrt{(}b^2 - 4\,a\,c)}{2\,a}$$

Esta ecuación puede tener 0, 1 ó 2 soluciones.
Por lo tanto, lo único que no se puede obtener es un conjunto de 3 soluciones. La afirmación falsa buscada es 'd)'.

Problema 27, Termodinámica

Un gas ideal que está a presión constante de $4 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ es enfriado de forma que su volumen decrece de $1{,}6\,\mathrm{m}^3$ a $1{,}2\,\mathrm{m}^3$. ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas?

a) $-4{,}8 \times 10^5\,\mathrm{J}$

b) $-1{,}6 \times 10^5\,\mathrm{J}$

c) $1{,}6 \times 10^5\,\mathrm{J}$

d) $4{,}8 \times 10^5\,\mathrm{J}$

e) $6{,}4 \times 10^5\,\mathrm{J}$

Respuesta

E l enfriamiento del gas lo lleva a una reducción de su volumen (compresión). El trabajo que el entorno realiza sobre el sistema durante la compresión es $W = P\,\Delta V = -1{,}6E5\ J$, lo cual nos lleva a la respuesta 'b)'.

Problema 28, Mecánica

Los jugadores de fútbol conocen el teorema de Bernoulli, ya que patean con efecto. De esta manera la pelota puede seguir una trayectoria curva, vista según su proyección sobre el plano de la cancha. Hace unos años un técnico dijo que la pelota no dobla si se juega a $4000\,\mathrm{m}$ de altura. Esto es:

a) cierto, porque la velocidad del viento a esa altura es menor.

b) cierto, porque a esa altura el aire se vuelve turbulento más fácilmente y deja de valer el teorema de Bernoulli.

c) cierto, porque la densidad del aire es menor.

d) cierto, porque la aceleración de la gravedad es menor.

e) falso, ya que todos los cambios que se producen con la altura se compensan.

Respuesta

E l efecto que adquieren las pelotas de fútbol, al igual que las pelotas de golf, los perfiles alares, etc, se debe a que el aire pasa en promedio más velozmente por un hemisferio de la pelota que por el otro, generando una diferencia de presión que empuja la pelota. En las pelotas esto se debe a su velocidad de rotación y en los perfiles alares a su no simetría.
La diferencia de presión, según Bernoulli, es $\Delta P = \rho(v_{izq}^2 - v_{der}^2)/2$, donde se observa que a mayor densidad ρ, mayor ΔP. Por lo tanto la disminución de densidad que presenta la atmósfera cuando ascendemos $4000\,\mathrm{m}$, puede explicar una disminución en el empuje (efecto) sobre la pelota.
Respuesta 'c)'.

Problema 29, Matematica

Para cualquier $a \ni \mathbb{R}$, la función:

$$\sin(a) + x\cos(a) - \frac{x^2}{2!}\sin(a) - \frac{x^3}{3!}\cos(a) + \frac{x^4}{4!}sen(a) + \frac{x^5}{5!}\cos(a)$$

corresponde a los primeros términos del desarrollo en serie de potencias centrado en $x = 0$ de la función:

a) $\sin(ax)$

b) $\cos(ax)$

c) $\sin(x + a)$

d) $\cos(x + a)$

e) $\sin(x + a) - \sin(ax)$

Respuesta

A cordemonos de como era el desarrollo en serie de una función,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + ... + \frac{f^n(0)}{2}x^n.$$

Teniendo esto en cuanta esto las funciones trigonométricas de ax producirán en las derivadas primera, segunda, tercera ... términos que contengan el factor a, a^2, a^3... por lo que quedan excluidas las respuestas a, b y e. Ahora bien, el hecho que el termino independiente $f(0) = \sin(a)$ indica que el el desarrollo en serie corresponde a la función $\sin(x + a)$ por lo que la respuesta correcta en la c.

Problema 30, Electromagnetismo

Una partícula cargada está inicialmente en reposo en un medio con un campo magnético uniforme, constante e infinito. Al recibir un impulso p, una trayectoria que NO puede describir la partícula es:

a) recta en el sentido del campo magnético.

b) recta, opuesta al sentido del campo magnético.

c) parabólica.

d) helicoidal.

e) circular.

Respuesta

C onsideremos el movimiento de la partícula después de recibir el impulso $\vec{p}$. Su velocidad será tal que $m\vec{v} = \vec{p}$, donde m es su masa. Consideremos ahora el efecto de la fuerza magnética, $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Estudiemos las distintas opciones. Consideremos que la partícula se mueve paralela a la dirección del campo o sea que $\vec{v} \times \vec{B} = 0$, por lo que continua en movimiento rectilineo uniforme. Esta es la situación que describe las respuestas a) y b). En cambio si la partícula tiene velocidad perpendicular al campo magnético el campo aplica una fuerza perpendicular a la misma forzando un movimiento circular, o sea la situación descrita en e). En el caso que la velocidad sea oblicua la campo, la situación será una combinación de los dos casos anteriormente descritos, es decir la partícula describe una hélice.

Teniendo en cuenta esto la única trayectoria NO compatible listadas es la parabólica por lo que la respuesta correcta es la c).