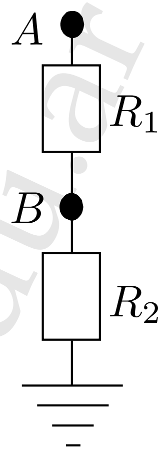
Examen 2007

Problema 1, Electricidad y magnetismo

En el circuito de la figura, el punto A se mantiene a un potencial constante, las resistencias valen $R_1 = 20000\ \Omega$ y $R_2 = 10000\ \Omega$. Un voltímetro, cuya resistencia interna es de $15000\ \Omega$, indica $45\ V$ cuando se conecta entre el punto B y tierra. Cuál es el potencial del punto B cuando el voltímetro no está conectado?



a) $25\ V$

b) $30\ V$

c) $45\ V$

d) $60\ V$

e) $65\ V$

Pista

El voltímetro actúa como una resistencia que conectamos en paralelo. Así, la resistencia equivalente entre el punto B y la tierra (con el voltímetro conectado) será menor que R_2 y, consecuentemente, también lo será el potencial respecto del potencial en ausencia del voltímetro (la parte inferior del circuito tendrá un menor peso dentro del divisor resistivo que conforma con la resistencia R_1). Claramente, esto elimina 3 respuestas del *multiple choice*.

Respuesta

Con el voltímetro conectado, la resistencia equivalente entre el punto B y tierra será:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_i}$$

donde r_i es la resistencia interna del voltímetro. La corriente que circula tanto por la resistencia R_1 como por el equivalente $R_2 - r_i$ es:

$$i = \frac{V_B}{R_{eq}}$$

Luego, el potencial en A será:

$$V_A = V_B + i\ .\ R_1 = V_B + \frac{R_1}{R_{eq}}\ .\ V_B$$

$$V_A = \frac{R_1 + R_{eq}}{R_{eq}}\ .\ V_B$$

Numéricamente, $V_A = 195\ V$. Este potencial está fijado externamente y se mantiene constante independientemente de la presencia o no del voltímetro. Luego, una vez que desconectamos el mismo, el potencial en B será:

$$V_B = i\ .\ R_2$$

donde ahora

$$i = \frac{V_A}{R_1 + R_2}$$

Así,

$$V_B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \,.\, V_A = 65\ V$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (e).

Problema 2, Óptica

Un rayo de luz incide sobre una placa de vidrio de 2 cm de espesor e índice de refracción 1.5, con un ángulo de 60° respecto a la normal. Después de atravesar la placa, el desplazamiento perpendicular a la dirección de incidencia del haz es aproximadamente de:

a) 0 cm

b) 0.5 cm

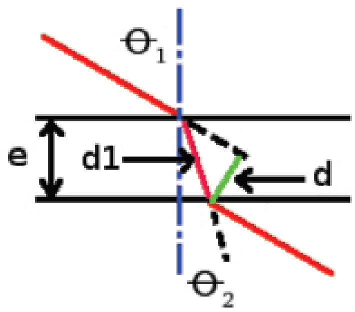
c) 1 cm

d) 1.5 cm

e) 2 cm

Respuesta

La siguiente figura representa la situación :



Tenemos que:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = 1{,}5$$

De la figura podemos ver que:

$$\cos\theta_2 = \frac{e}{d_1}$$

A su vez, la distancia perpendicular a la dirección de incidencia en que se desplaza el haz está dada por:

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{d}{d_1}$$

Reemplazando, obtenemos:

$$d = d_1 \ . \ \sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos\theta_2} \ . \ e$$

El ángulo θ_2 se obtiene a partir de la primera ecuación:

$$\sin\theta_2 = \sin\theta_1/1{,}5 = \sqrt{3}/3 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_2 = 35{,}26°$$

Luego, la distancia pedida será:

$$d = \frac{\sin(60^\circ - 35{,}26^\circ)}{\cos(35{,}26^\circ)} \ . \ 2 \ cm = 1{,}025 \ cm$$

Con lo cual, la respuesta correcta es la (c).

Problema 3, Cálculo diferencial

La siguiente ecuación define implícitamente a z como función de x e y:

$$x^3z^5 - y^2z^3 - 3xy = 1$$

¿Cuál es el valor de $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto $(x, y) = (-1, 1)$?

a) -8

b) $-\frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{8}$

d) 1

e) 8

Respuesta

Llamamos:

$$f[x, y, z(x, y)] = x^3z^5 - y^2z^3 - 3xy$$

Por el enunciado sabemos que $f[x, y, z(x, y)] = 1$. Luego, dado que es una constante, la derivada de f según y debe ser nula:

$$\frac{df}{dy} = 0$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos:

$$\frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Así,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Hallamos las derivadas necesarias:

- $\frac{\partial f}{\partial y} = -2yz^3 - 3x$
- $\frac{\partial f}{\partial z} = 5x^3z^4 - 3y^2z^2$

De este modo:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2yz^3 + 3x}{5x^3z^4 - 3y^2z^2}$$

En el punto $(x, y) = (-1, 1)$, a partir de la relación implícita para z dada por $f = 1$, se tiene que:

$$[x^3z^5 - y^2z^3 - 3xy]_{(x,y)=(-1,1)} = -z^5 - z^3 + 3 = 1$$

una de cuyas soluciones es $z = 1$ (obviamente, no estamos buscando una solución mas allá de la que surge por simple inspección).

Reemplazando:

$$[\frac{\partial z}{\partial y}]_{(x,y)=(-1,1)} = \frac{2.(1).(1)^3 + 3.(-1)}{5.(-1)^3.(1)^4 - 3.(1)^2.(1)^2} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

Con lo cual, la respuesta correcta es la (c).

Problema 4, Calor

Un sistema recibe 50000 calorías y simultáneamente se expande venciendo una presión exterior constante de $698\ kPa$. La energía interna del sistema es la misma al comienzo que al final del proceso. El incremento de volumen es:

a) $0{,}30\ m^3$

b) $0{,}35\ m^3$

c) $0{,}40\ m^3$

d) $0{,}45\ m^3$

e) $0{,}50\ m^3$

Respuesta

Planteamos el primer principio para este sistema:

$$\Delta U = Q - W_{exp}$$

donde W_{exp} indica el trabajo de expansión que realiza la frontera del sistema:

$$W_{exp} = \int p \ . \ dV$$

Dado que la presión en la frontera del sistema es constante, tendremos que:

$$W_{exp} = p \ . \ \Delta V$$

El enunciado indica que la energía interna no cambia entre los estados extremos. En consecuencia, se satisface:

$$Q = W_{exp} = p \ . \ \Delta V$$

Despejando,

$$\Delta V = \frac{Q}{p}$$

Ahora debemos tener en cuenta las unidades: 1 cal $= 4{,}186\ J = 4{,}186\ Pa.m^3$. De esta manera,

$$\Delta V = \frac{50000\ cal\ .\ 4{,}186\ Pa.m^3/cal}{698000\ Pa} = 0{,}30\ m^3$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

Problema 5, Mecánica del punto

¿Cuáles de los siguientes sistemas de masa y resorte oscilarán con el mismo período?

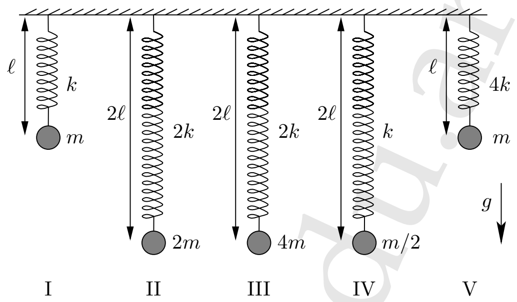
a) II y III

b) I y V

c) II y IV

d) I y II

e) I y IV



Respuesta

Sabemos que la frecuencia de oscilación de un sistema de masa M y constante K está dada por $\omega = \sqrt{K/M}$. Esto se mantiene aún en presencia de la gravedad. En este caso, el equilibrio está dado por:

$$\text{Equilibrio:} \qquad Mg = K(x_{eq} - L) \;\Rightarrow\; (x_{eq} - L) = Mg/K$$

donde hemos considerado que la longitud natural del resorte es L y la constante del resorte es K. Para el sistema fuera del equilibrio, la ecuación de movimiento es (x midiendo hacia abajo):

$$M\ddot{x} = Mg - K(x - L) = K(x_{eq} - L) - K(x - L) = -K(x - x_{eq})$$

Llamando $y = x - x_{eq}$, obtenemos:

$$M\ddot{y} = -Ky$$

La solución general de esta ecuación diferencial está dada por $y(t) = A_1 \,.\, \sin(\omega t) + A_2 \,.\, \cos(\omega t)$, donde $\omega^2 = K/M$. Claramente, la frecuencia de oscilación no depende ni de la posición de equilibrio ni de la longitud natural del resorte.

Para los distintos sistemas planteados en el enunciado, tenemos que:

- Sistema I: $\omega^2 = k/m$
- Sistema II: $\omega^2 = (2k)/(2m) = k/m$
- Sistema III: $\omega^2 = (2k)/(4m) = k/(2m)$
- Sistema IV: $\omega^2 = k/(m/2) = 2k/m$
- Sistema V: $\omega^2 = (4k)/m = 4k/m$

Los sistemas I y II tienen la misma frecuencia de oscilación y, por lo tanto, tendrán el mismo período. Así, la respuesta correcta es la (d).

Problema 6, Algebra lineal

Sean A, B y C tres matrices reales de 2 x 2 arbitrarias. Además, 0 y 1 denotan las matrices nula e identidad de iguales dimensiones. Dados los enunciados:

I. $A^2 = 0$ implica que $A = 0$

II. $AB = AC$ implica que $B = C$

III. Si A es invertible y $A^{-1} = A$ entonces $A = 1$ o $A = -1$

¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera?

a) Solo I es correcto.

b) Solo III es correcto.

c) I y III son correctos, II es falso.

d) II y III son correctos, I es falso.

e) Todos son falsos.

Pista

Claramente las proposiciones recíprocas son verdaderas. Por ejemplo, la proposición I es trivial: Si $A = 0$ entonces $A^2 = 0$. Sin embargo, que las proposiciones recíprocas sean verdaderas, dice muy poco respecto de la proposición directa. Hay que hacer las cuentas ... o encontrar contraejemplos. Esto es, si existe un solo caso en el cual no se cumple la proposición, entonces dicha proposición es falsa.

Respuesta

Veamos la proposición I. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La potencia cuadrada de A igual a cero implica cuatro ecuaciones. Esto es,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Explícitamente:

$$a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = 0 \qquad (1)$$
$$a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} = 0 \qquad (2)$$
$$a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} = 0 \qquad (3)$$
$$a_{21}a_{12} + a_{22}^2 = 0 \qquad (4)$$

Restando las Ecs. (9) y (12) vemos que se debe satisfacer que $a_{11}^2 = a_{22}^2$. Tomemos el caso en que $a_{11} = a_{22}$. Reemplazando este resultado en las Ecs. (10) y (11), se debe satisfacer que $a_{11}a_{12} = 0$ y $a_{11}a_{21} = 0$. Haciendo $a_{11} = a_{22} = 0$ satisfacemos estas dos últimas relaciones. Asimismo las Ecs. (9) y (12) pueden satisfacerse haciendo uno de los coeficientes a_{12} o a_{21} igual a cero.

En base a lo anterior, proponemos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es distinta a la matriz nula mientras que su potencia cuadrada si lo es. Esto contradice a la proposición y, por lo tanto, la proposición I es falsa.

Veamos la proposición II. Tenemos que $AB = AC$; en consecuencia, se satisface $A(B - C) = 0$. Llamando $D = B - C$, tenemos que $AD = 0$. La proposición dada equivale a decir que:

$$\text{Si } AD = 0 \text{ (siendo } A \neq 0) \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

puesto que el hecho de que D sea cero implica que $B = C$.

Nos concentramos en ver la veracidad de esta última proposición equivalente. Operando de similar manera al caso anterior (esto es, planteando las ecuaciones para cada coeficiente) podemos rápidamente encontrar un contraejemplo; por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que:

$$AD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que se satisface que $AD = 0$, siendo $D \neq 0$, entonces se satisface que $AB = AD$ sin que sea $B = D$. Por lo tanto, la proposición es falsa.

Veamos la proposición III. Tenemos que A es invertible y su inversa es igual a sí misma. En consecuencia, $AA^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad A^2 = 1$. Esto es:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} &= 1 & (5) \\ a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} &= 0 & (6) \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} &= 0 & (7) \\ a_{21}a_{12} + a_{22}^2 &= 1 & (8) \end{aligned}$$

Nuevamente, restando las Ecs. (13) y (16) se debe satisfacer que $a_{11}^2 = a_{22}^2$. Tomemos el caso en que $a_{11} = a_{22}$. De las Ecs. (14) y (15) se debe cumplir que $a_{11}a_{12} = 0$ y $a_{11}a_{21} = 0$. Estas relaciones se pueden satisfacer haciendo $a_{11} = a_{22} = 0$. Asimismo, las Ecs. (13) y (16) se pueden satisfacer haciendo $a_{12} = a_{21} = 1$ o $a_{12} = a_{21} = -1$.

En consecuencia, en base a lo anterior proponemos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de modo que se satisface que:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que $A^2 = 1$, la matriz es invertible y su inversa coincide con sí misma; sin embargo, vemos que la A propuesta no es $A = 1$ o $A = -1$, con lo cual la proposicón es falsa.

De todo lo expuesto, concluímos que todas las proposiciones son falsas y la respuesta correcta es la (e).

Problema 7, Mecánica del cuerpo rígido

Una plataforma giratoria rota libremente con una velocidad angular ω cuando una persona de masa M y momento de inercia I está parada en ella. La persona tiene sus brazos extendidos horizontalmente (de largo l) y en cada mano sostiene un cuerpo de masa m. Repentinamente deja caer ambos cuerpos fuera de la plataforma en forma simultánea. El valor de la velocidad angular final de la plataforma es:

a) $\omega(1 - 2\frac{m}{M})$

b) $\omega\frac{I-ml^2}{I}$

c) $\omega\frac{I+ml^2}{I}$

d) $\omega\frac{I+2ml^2}{I}$

e) ω

Pista

En el balance de momento angular: Las masas que se sueltan, ¿se llevan momento angular? ¿Se llevan **mas** momento angular que el que tenían antes de ser soltadas? ¿Se llevan **menos**?

Respuesta

Veamos en detalle lo que sucede: En un primer momento, todo el sistema (persona de masa M y las masas m) giran con velocidad angular ω. Inmediatamente después de ser soltadas, las masas salen con la velocidad tangencial correspondiente al giro que poseían (la persona no hace mas que soltarlas). Esto es:

- Inicialmente, el sistema tiene un momento angular $L_{sist} = L_{persona} + L_{masas}$.
- Luego de ser soltadas, las masas retienen el momento angular que poseían dado que salieron tangencialmente con la velocidad tangencial correspondiente al giro dado por ω.
- Por conservación del momento, la persona debe seguir poseyendo el momento angular que tenía y, dado que su momento de inercia no cambia (I se refiere exclusivamente a la persona y no a las masas), la velocidad angular debe seguir siendo la misma.

De modo que la respuesta correcta es la (e).

Problema 8, Electricidad y magnetismo

Dos iones de iguales masas m y cargas q tienen velocidades paralelas con módulos v_1 y v_2, respectivamente. Ingresan a una región con campo magnético uniforme $\vec{B}$, donde describen trayectorias circulares. Si llamamos r_1 y r_2 a los radios de las trayectorias, ω_1 y ω_2 a las velocidades angulares, entonces se cumple que:

a) $\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$

b) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{v_2}{v_1}$

c) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$

d) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_1}{v_2}$

e) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}$

Respuesta

Las trayectorias de ambas partículas describen círculos (las velocidades no tienen una componente paralela al campo). La fuerza centrípeta, dada por la fuerza de Lorentz, satisface el balance de fuerzas en la dirección radial. Para una trayectoria circular:

$$F_c = m \cdot r \cdot \omega^2 = q \cdot v \cdot B$$

donde el producto cruz entre v y B es simplemente $v \cdot B$, dada la ortogonalidad de ambos. A su vez, en una trayectoria circular:

$$v = r \cdot \omega$$

con lo cual:

$$m \cdot \omega = q \cdot B \qquad \Rightarrow \qquad \omega = (q/m) \cdot B$$

Dado que las partículas poseen iguales masas y cargas, las velocidades angulares de ambas deben ser iguales y, por lo tanto, el cociente ω_1/ω_2 debe ser la unidad. De modo que la respuesta correcta es la (c).

Problema 9, Cálculo

Sea γ la curva en R^3 dada por la parametrización $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces la longitud de γ es:

a) $\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2}\pi$

d) $2\sqrt{2}\pi$

e) $2\sqrt{6}\pi$

Pista

Una forma rápida de hacer este ejercicio es dándose cuenta del tipo de curva descripta por la parametrización y representando a la misma de una manera conveniente!

Si no consideramos la coordenada z, las dos primeras coordenadas nos dicen que la curva se cierra en un círculo de radio unidad. Agregando la coordenada z vemos que, al mismo tiempo que la curva se va cerrando, va avanzando en la dirección axial (eje z). Por lo tanto, la curva descripta es una espiral con los extremos alineados según una paralela al eje de la misma.

Una espiral (de radio constante) se encuentra embebida en una superficie cilíndrica. ¿Qué sucede si tomamos esta superficie cilíndrica (con la curva embebida), la cortamos en forma paralela al eje pasando por los puntos extremos de la espiral, y la desenrrollamos en el plano? Veremos que la curva en R^2 será una línea recta orientada en un cierto ángulo.

La simplificación proviene al darse cuenta que dicha línea es la hipotenusa de un triángulo recto del cual conocemos ambos catetos (el perímetro del cilindro y la distancia axial entre los extremos). De este modo, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos la respuesta.

Respuesta

La longitud de una curva está dada por:

$$L = \int_\gamma ds$$

donde γ indica la curva y $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Dada la parametrización de cada coordenada:

$$\begin{aligned} x &= x(t) = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad dx = -\sin(t)dt \\ y &= y(t) = \sin(t) \quad \Rightarrow \quad dy = \cos(t)dt \\ z &= z(t) = t \quad \Rightarrow \quad dz = dt \end{aligned}$$

vemos que el diferencial de longitud de arco es:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(-\sin(t)dt)^2 + (\cos(t)dt)^2 + (dt)^2} = \sqrt{2dt^2} = \sqrt{2}dt$$

Integrando en t obtenemos la respuesta:

$$L = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (d).

Problema 10, Oscilaciones y ondas

Dos ondas planas tienen la misma amplitud, vectores de onda $\vec{k}$ y $\vec{k}'$, y fases φ y φ', respectivamente. Sea además, un número n perteneciente a los enteros. Para que las ondas interfieran destructivamente entre sí (intensidad resultante nula en todo el espacio) debe cumplirse necesariamente que:

a) $\vec{k} = -\vec{k}'$, $\varphi = \varphi'$

b) $\vec{k} = -\vec{k}'$, $\varphi - \varphi' = (2n+1)\pi$

c) $\vec{k} = \vec{k}'$, $\varphi - \varphi' = (n + \frac{1}{2})\pi$

d) $\vec{k} = \vec{k}'$, $\varphi - \varphi' = (2n+1)\pi$

e) $\vec{k} = \vec{k}'$, $\varphi - \varphi' = 2n\pi$

Respuesta

Matemáticamente, una onda plana se expresa mediante:

$$s(\vec{x}, t) = a \cdot \exp^{i\cdot(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t + \varphi)}$$

Dos ondas planas de igual intensidad interfieren destructivamente en todo el espacio; en consecuencia, la suma de las mismas debe ser nula:

$$s_1(\vec{x}, t) + s_2(\vec{x}, t) = a \cdot \exp^{i\cdot(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t + \varphi)} + a \cdot \exp^{i\cdot(\vec{k}'\cdot\vec{x} - \omega'\cdot t + \varphi')} = 0$$

En consecuencia,

$$\exp^{i\cdot(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t + \varphi)} = -\exp^{i\cdot(\vec{k}'\cdot\vec{x} - \omega'\cdot t + \varphi')}$$

Teniendo en cuenta que $(-1) = \exp^{i\cdot\pi}$ obtenemos:

$$\exp^{i\cdot(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t + \varphi)} = \exp^{i\cdot(\vec{k}'\cdot\vec{x} - \omega'\cdot t + \varphi' + \pi)}$$

La igualdad de las exponenciales implica que:

$$\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\cdot t + \varphi = \vec{k}'\cdot\vec{x} - \omega'\cdot t + \varphi' + \pi + 2n\pi$$

Por lo tanto,

$$(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x} - (\omega - \omega')\cdot t + (\varphi - \varphi') = (2n+1)\pi$$

Dado que la interferencia se debe cumplir en todo punto del espacio, la igualdad anterior no puede depender de $\vec{x}$; luego, $\vec{k} = \vec{k}'$. Asimismo, la igualdad debe valer para todo instante t; en consecuencia, $\omega = \omega'$. Reemplazando, obtenemos que las fases deben satisfacer:

$$\varphi - \varphi' = (2n+1)\pi$$

En consecuencia, la respuesta correcta es la (d).

Problema 11, Física general

La masa de aire contenida en una habitación de $3\ m$ x $3\ m$ de planta y $2{,}5\ m$ de altura es aproximadamente de:

a) $23\ kg$

b) $25\ g$

c) $400\ kg$

d) $50\ kg$

e) $10\ g$

Respuesta

En este problema nos piden que estimemos una magnitud. Para ello debemos tener alguna idea de la densidad del aire, en condiciones atmosféricas. En general, como primera aproximación, se toma igual a $1\ kg/m^3$. De este modo,

$$m = \rho \cdot V = 1\ kg/m^3 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 2{,}5)\ m^3 = 22{,}5\ kg$$

En caso de que no recordáramos cuál es, aproximadamente, la densidad del aire, podemos estimar dicha magnitud mediante la ley de los gases ideales. De este modo:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

donde p es la presión (atmosférica), M es la masa molar del aire, R es la constante de los gases ideales y T es la temperatura (atmosférica). Numéricamente:

- $p = 101{,}3\ kPa$
- $M = 28{,}8\ kg/kmol$
- $R = 8{,}314\ kPa.m^3/(kmol.K)$
- $T = 298\ K$

En consecuencia:

$$\rho = \frac{101{,}3 \cdot 28{,}8}{8{,}314 \cdot 298}\ kg/m^3 = 1{,}18\ kg/m^3$$

De lo anterior vemos que la respuesta correcta es la (a).

Problema 12, Probabilidad

Si de una baraja francesa de 52 naipes se sacan 4, la probabilidad de sacar los 4 Ases es aproximadamente de:

a) $0{,}14 \text{ x } 10^{-6}$

b) $0{,}55 \text{ x } 10^{-6}$

c) $3{,}28 \text{ x } 10^{-6}$

d) $3{,}69 \text{ x } 10^{-6}$

e) $0{,}077$

Respuesta

La probabilidad de obtener los 4 Ases es $p(A_1, A_2, A_3, A_4)$, donde A_i indica la obtención del i-ésimo As y las comas indican un evento conjunto. En este punto, quizás estuviésemos tentados de pensar que la probabilidad de obtener un As es siempre la misma y que la obtención de los 4 Ases es simplemente la obtención independiente de los mismos (la probabilidad mencionada a la cuarta potencia). Esto está mal debido a que los eventos individuales no son independientes.

Para formular esto en forma precisa, aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(A, B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

donde $P(A/B)$ indica la probabilidad de que suceda el evento A dado que el evento B es cierto.

Aplicando lo anterior en forma sucesiva, tenemos:

$$\begin{aligned} P(A_1, A_2, A_3, A_4) &= P(A_4/A_1, A_2, A_3) \cdot P(A_1, A_2, A_3) \\ &= P(A_4/A_1, A_2, A_3) \cdot P(A_3/A_1, A_2) \cdot P(A_1, A_2) \\ &= P(A_4/A_1, A_2, A_3) \cdot P(A_3/A_1, A_2) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_1) \end{aligned}$$

donde cada una de las probabilidades es fácilmente determinable.

- $P(A_1)$ indica la probabilidad de obtener el primer As. Dado que hay 52 cartas y 4 Ases, la probabilidad es $4/52$.
- $P(A_2/A_1)$ indica la probabilidad de obtener un segundo As dado que ya obtuvimos uno. En este caso, quedan 3 Ases y 51 cartas. Porlo tanto, la probabilidad es $3/51$.
- $P(A_3/A_1, A_2)$ es la probabilidad de sacar un tercer As dado que los eventos anteriores son ciertos. Aplicando el mismo razonamiento que antes, esta probabilidad resulta $2/50$.
- $P(A_4/A_1, A_2, A_3)$ es la probabilidad de obtener el cuarto As dado que ya tenemos los restantes. De la misma manera que antes, esta probabilidad es $1/49$.

Por lo tanto, la probabilidad conjunta es:

$$P(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} = \frac{24}{6497400} \simeq 3{,}69 \cdot 10^{-6}$$

En consecuencia, la respuesta correcta es la (d).

Problema 13, Mecánica del punto

En una balanza de brazos iguales ideal (sin masa y sin roce) se coloca un cuerpo de masa m en un extremo y uno de masa $2m$ en el otro. Si la aceleración de la gravedad es g, ¿con qué aceleración iniciarán su movimiento los cuerpos?

a) g

b) $g/2$

c) $g/3$

d) $g/4$

e) $g/5$

Respuesta

Una balanza de brazos iguales ejerce la misma fuerza a ambos lados de la misma. El balance de fuerzas sobre la masa m (dirección vertical hacia arriba) es:

$$T - m\, g = m\, a$$

donde T indica la tensión en cada brazo y a es la aceleración.

El balance de fuerzas sobre la masa $2m$ resulta (dirección vertical hacia abajo):

$$2\, m\, g - T = 2\, m\, a$$

En el planteo de ambos balances, la dirección de a es consistente con el hecho de que las masas se mueven hacia un lado o hacia el otro de la balanza.

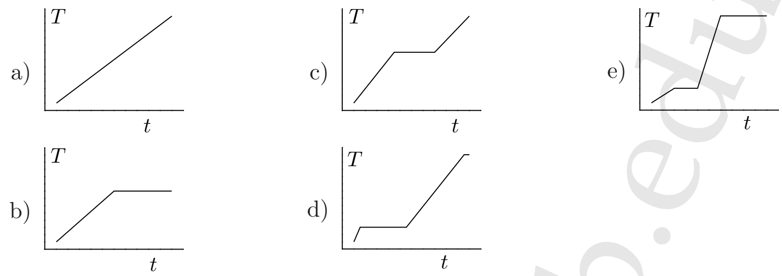
Despejando la tensión T de ambos balances e igualando llegamos a:

$$T = m\, a + m\, g = 2\, m\, g - 2\, m\, a \quad \Rightarrow \quad a = g/3$$

En consecuencia, la respuesta correcta es la (c).

Problema 14, Termodinámica

Un vaso abierto contiene $500\ g$ de hielo a $-20\ ^\circ C$. Se suministra calor al vaso al ritmo constante de $1000\ \frac{cal}{min}$ durante $100\ min$. ¿Cuál de las siguientes curvas describe la evolución de la temperatura del contenido del vaso en función del tiempo? Datos: calor específico del hielo $= 0{,}55\ \frac{cal}{g\ ^\circ C}$, calor específico del agua $= 1\ \frac{cal}{g\ ^\circ C}$, calor de fusión del hielo $= 80\ \frac{cal}{g}$, calor de vaporización del agua $= 540\ \frac{cal}{g}$. Desprecie la capacidad calorífica del recipiente.



Respuesta

Para responder esta pregunta debemos hallar el tiempo que dura cada proceso y las pendientes correspondientes a cada etapa.

Durante el calentamiento sensible del hielo tenemos que, para llevar todo el hielo a $0\ ^\circ C$, se ocupa una cantidad de tiempo (a la tasa de calentamiento impuesta):

$$t_{s,h} = \frac{Q_{s,h}}{r_{cal}}$$

donde $Q_{s,h}$ es el calor necesario para producir el proceso analizado y r_{cal} es la tasa de calentamiento. Numéricamente:

$$t_{s,h} = \frac{m_h \cdot c_h \cdot \Delta T}{r_{cal}} = \frac{500\ g \cdot 0{,}55\ cal/(g^\circ C) \cdot 20\ ^\circ C}{1000\ cal/min} = 5{,}5\ min$$

La pendiente de la gráfica T vs. t durante esta etapa es:

$$m_h \cdot c_h \cdot \Delta T = r_{cal} \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{r_{cal}}{m_h \cdot c_h} = 3{,}636\ ^\circ C/min.$$

Para fundir todo el hielo se requiere una cantidad de calor:

$$Q_f = m \cdot \lambda_f$$

donde λ_f es el calor de fusión del hielo. A la tasa de calentamiento impuesta necesitamos una cantidad de tiempo:

$$t_f = \frac{Q_f}{r_{cal}} = \frac{m \cdot \lambda_f}{r_{cal}} = \frac{500\ g \cdot 80\ cal/g}{1000\ cal/min} = 40\ min.$$

La transformación de fase ocurre a temperatura constante con lo cual, la pendiente de T vs. t es 0.

El calentamiento sensible del agua desde $0\ ^\circ C$ hasta $100\ ^\circ C$ insume una cantidad de tiempo:

$$t_{s,a} = \frac{Q_{s,a}}{r_{cal}} = \frac{m_a \cdot c_a \cdot \Delta T}{r_{cal}} = \frac{500\ g \cdot 1\ cal/(g^\circ C) \cdot 100\ ^\circ C}{1000\ cal/min} = 50\ min.$$

La pendiente durante este proceso es:

$$m_a \cdot c_a \cdot \Delta T = r_{cal} \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{r_{cal}}{m_a \cdot c_a} = 2\,^{\circ}C/min.$$

Hasta ahora, los procesos considerados consumieron una cantidad de tiempo igual a $(5{,}5 + 40 + 50)\,min. = 95{,}5\,min.$ Durante los siguientes $4{,}5\,min.$ parte del agua pasará al estado vapor. Este proceso fija la temperatura en $100\,^{\circ}C$.

De acuerdo a lo hallado anteriormente, la gráfica correspondiente a la evolución T vs. t es la (d).

Problema 15, Cálculo

¿Cuál de las siguientes condiciones asegura que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-1)^n 7^n$$

sea convergente?

a) $a_n > 0$ para todo $n \in N$.

b) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^7$ es convergente.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^2$ es convergente.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^n$ es convergente.

Respuesta

Una de las tantas condiciones que aseguran la convergencia de una serie es (utilizamos esta porque nos simplifica la solución):

$$|\frac{S_{n+1}}{S_n}| < 1$$

Evaluando el cociente para la serie planteada obtenemos:

$$|\frac{S_{n+1}}{S_n}| = |\frac{a_{n+1}\ (-1)^{n+1}\ 7^{n+1}}{a_n\ (-1)^n\ 7^n}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}\ (-1)\ 7| = 7\ |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

La anterior condición de convergencia requiere que:

$$|\frac{S_{n+1}}{S_n}| = 7\ |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \quad\Rightarrow\quad |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \frac{1}{7} = 0{,}142857...$$

Evaluamos la respuesta (e) bajo la misma condición de convergencia.
La respuesta (e) impone que:

$$|\frac{S^e_{n+1}}{S^e_n}| = |\frac{a_{n+1}\ 10^{n+1}}{a_n\ 10^n}| = 10\ |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$$

Con lo cual,

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1/10 = 0{,}1$$

Claramente, si la serie dada por la respuesta (e) es convergente, entonces $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 0{,}1 < 0{,}142857...$ y la serie del enunciado también lo es.

En consecuencia, la respuesta (e) asegura que la serie dada sea convergente y es la respuesta correcta. No hemos probado la falsedad de las otras respuestas (y quizá el anterior no sea el camino para hacerlo) pero no es necesario hacerlo para responder este problema.

Problema 16, Electricidad

Tres condensadores de capacidad C, $2C$ y $3C$ están conectados en serie. Los extremos de este circuito se conectan a una batería de tensión V. Una vez en equilibrio, se desconecta la batería y se reconectan los condensadores en paralelo, uniendo los bornes positivos entre sí, y los bornes negativos entre sí. Una vez llegado al nuevo equilibrio, ¿qué tensión se establece en los extremos del circuito?

a) $\frac{3}{11}\,V$

b) $\frac{1}{3}\,V$

c) $11\,V$

d) $\frac{1}{11}\,V$

e) $\frac{1}{6}\,V$

Respuesta

Inicialmente los condensadores están conectados en serie. En cada uno de los capacitores se desarrolla una caída de potencial dada por $V_i = Q_i/C_i$ totalizando la caída de potencial impuesta, V. Esto es:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$$

Por conservación de la carga, en una conexión en serie, los Q_i deben ser iguales entre sí. Entonces,

$$V = Q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

En consecuencia, en esta primera etapa, cada capacitor desarrolla una carga igual a:

$$Q = \frac{V}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{6}{11}\, C\, V$$

Posteriormente, los capacitores se conectan en paralelo manteniendo la polaridad (esto es, no se anulan cargas entre caras adyacentes sino que se redistribuyen). En este caso, se desarrolla una caída de potencial V_f común a todos los capacitores:

$$V_f = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$$

De la igualdad anterior obtenemos:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_f}$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_f}$$

$$C_3 = \frac{Q_3}{V_f}$$

Sumando las anteriores:

$$C_1 + C_2 + C_3 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{V_f}$$

La carga total de un mismo lado del circuito en paralelo es la suma de lo que tenía cada uno de los capacitores (se mantuvo la polaridad); o sea, $Q_t = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3 \cdot (6/11)\ C\ V$.

A su vez, la suma de las capacidades es $C_1 + C_2 + C_3 = 6\ C$, de modo que finalmente obtenemos:

$$6\ C = \frac{18}{11}\ C\ \frac{V}{V_f} \quad \Rightarrow \quad V_f = \frac{3}{11}\ V$$

Así, la respuesta correcta es la (a). La resolución anterior se puede realizar inmediatamente a partir de las capacidades equivalentes de cada conexión (de hecho, lo que hicimos es básicamente la deducción de ello).

Problema 17, Mecánica del punto

Dos bolitas de igual masa, se encuentran a la misma altura respecto del suelo. Ambas se arrojan con velocidad inicial v, una de ellas en dirección vertical y la otra en dirección horizontal. Se afirma que en el momento en que cada bolita llega al suelo:

I. Las dos bolitas tienen la misma aceleración.

II. El módulo de la velocidad de ambas bolitas es diferente.

III. Las dos bolitas tienen la misma energía.

De las afirmaciones anteriores:

a) Sólo II es correcta.

b) Sólo I y II son correctas.

c) Sólo I y III son correctas.

d) Sólo I es correcta.

e) Ninguna es correcta.

Respuesta

Veamos cada afirmación:

- Las dos bolitas tienen la misma aceleración: dado que ambas están en caída libre en el mismo campo gravitatorio y la gravedad es la única fuerza externa que actúa sobre ellas, sus aceleraciones deben ser iguales entre sí e iguales a $\vec{g}$. Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

- El módulo de la velocidad de ambas bolitas es diferente: dado que la única fuerza externa es conservativa, la conservación de la energía nos dice que la suma de las energías cinética y potencial es un valor constante, E.
  Ambas bolitas tienen la misma masa; en consecuencia y dado que ambas parten de la misma altura y con la misma velocidad v (aunque en direcciones distintas), éstas poseen la misma energía E (potencial + cinética). En el estado final (al nivel del suelo), ambas tienen la misma energía potencial (misma altura). Por lo tanto, la conservación de la energía implica que deben tener la misma energía cinética cuando lleguen al suelo. Dada la igualdad de las masas, las velocidades al cuadrado deben ser iguales y, por ello, también sus módulos. En consecuencia, la afirmación es falsa.

- Las dos bolitas tienen la misma energía: por lo contestado en el inciso anterior podemos ver que la afirmación es verdadera

Así, solo las afirmaciones I y III son correctas y la respuesta es la (c).

Problema 18, Algebra lineal

Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2-k & k+3 \\ -2 & 5+2k & -2k-6 \\ -2 & 2+k & -k-3 \end{pmatrix}$$

¿para cuál de los siguientes valores de k la matriz A tiene núcleo de dimensión máxima?

a) $k = 0$

b) $k = -1$

c) $k = -2$

d) $K = -3$

e) $k = -4$

Respuesta

La matriz A representa la transformación lineal T de un espacio lineal V en un espacio lineal W. En notación vectorial, $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$, donde $\vec{x} \in V$ y $\vec{y} \in W$.

El núcleo de la transformación, $N(T)$, es el subespacio de V que tiene al elemento nulo como imagen; esto es, $A \cdot \vec{x}_N = 0$ donde $\vec{x}_N \in N(T)$. A su vez, el recorrido de la transformación, $T(V)$, es un subespacio de W donde dicha transformación aplica.

Sea $\dim(N(T))$ la dimensión del núcleo y $\dim(T(V))$ la dimensión del recorrido. Un importante teorema del álgebra lineal establece que la suma de las anteriores dimensiones es igual a la dimensión del dominio: $\dim(N(T)) + \dim(T(V)) = \dim V$.

Dado que la transformación toma elementos de todo R^3, la anterior suma debe ser igual a 3. El núcleo tendrá dimensión máxima cuando el recorrido tenga dimensión mínima. En consecuencia, concentrémonos en hallar la dimensión del recorrido. Esta dimensión es lo que se conoce como el *rango* de la tranformación.

A partir de la notación vectorial, vemos que la transformación involucra las siguientes ecuaciones:

$$2 \cdot x_1 + (-2-k) \cdot x_2 + (k+3) \cdot x_3 = 0 \tag{9}$$

$$-2 \cdot x_1 + (5+2k) \cdot x_2 + (-2k-6) \cdot x_3 = 0 \tag{10}$$

$$-2 \cdot x_1 + (2+k) \cdot x_2 + (-k-3) \cdot x_3 = 0 \tag{11}$$

Claramente, las Ecs. (9) y (11) son linealmente dependientes (difieren en un factor (-1)). Entonces, sabemos que el recorrido tiene, a lo sumo, dimensión 2.

Asimismo, independientemente del resultado al que se llegue con la elección del valor k, la columna 1 de la matriz A tiene elementos no nulos y, por lo tanto, no hay forma de que A sea una transformación nula (esto es, que lleve todo el dominio al elemento nulo del espacio W), en cuyo caso la dimensión del núcleo sería 3 y la dimensión del recorrido igual a 0.

De esta manera, sabemos que el recorrido tiene dimensión 1 o 2. Por lo tanto, el núcleo tendrá dimensión máxima (igual a 2) si logramos encontrar un valor k tal que el rango de la transformación sea 1.

Ya hemos dicho que las Ecs. (9) y (11) son linealmente dependientes; entonces, el rango de la transformación será 1 si existe algún k para el cual las Ecs. (9) y (10) (o (10) y (11)) también son linealmente dependientes.

Esto es:

$$\alpha A_1 + \beta A_3 = \vec{0}$$

donde A_1 es el vector fila 1, A_3 es el vector fila 3, y α y β son constantes a determinar. Si existen constantes α y β no nulas tal que se satisface lo anterior, entonces las Ecs. (9) y (10) son linealmente dependientes. Tenemos:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -2-k \\ k+3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 5+2k \\ -2k-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Explícitamente:

$$2 \cdot \alpha - 2 \cdot \beta = 0 \quad (12)$$
$$(-2-k) \cdot \alpha + (5+2k) \cdot \beta = 0 \quad (13)$$
$$(k+3) \cdot \alpha + (-2k-6) \cdot \beta = 0 \quad (14)$$

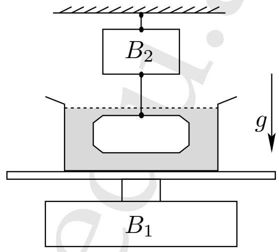
De la Ec. (12) se debe cumplir que $\alpha = \beta$. Reemplazando en las otras dos ecuaciones:

$$(-2-k) \cdot \alpha + (5+2k) \cdot \alpha = 0 \Rightarrow (3+k) \cdot \alpha = 0 \quad (15)$$
$$(k+3) \cdot \alpha + (-2k-6) \cdot \alpha = 0 \Rightarrow -(3+k) \cdot \alpha = 0 \quad (16)$$

En consecuencia, tenemos que si $k \neq -3$, la única solución es que $\alpha = \beta = 0$ (solución trivial) y las ecuaciones serán linealmente independientes, en cuyo caso dim($T(V)$)$= 2$ y dim($N(T)$)$= 1$. Si $k = -3$, existen soluciones no triviales para el anterior sistema y los vectores son linealmente dependientes. En este caso, dim($T(V)$)$= 1$ y dim($N(T)$)$= 2$. Por lo tanto, el núcleo tiene dimensión máxima cuando $k = -3$ y la respuesta correcta es la (d).

Problema 19, Hidrostática

Un cuerpo está suspendido mediante una cuerda de una balanza B_2. El cuerpo se encuentra sumergido en el agua contenida en un recipiente, que está apoyado en la balanza B_1. Sea el peso del agua de $40\ kg$ y el del recipiente de $5\ kg$. Si en esa situación las balanzas B_1 y B_2 indican $60\ kg$ y $35\ kg$, respectivamente, ¿qué indicarán si se saca el cuerpo del líquido?



a) $45\ kg$ y $35\ kg$

b) $45\ kg$ y $50\ kg$

c) $45\ kg$ y $70\ kg$

d) $60\ kg$ y $50\ kg$

e) $60\ kg$ y $70\ kg$

Respuesta

Planteamos los balances de fuerzas para la primera situación: el cuerpo sumergido en el líquido.

Para el cuerpo suspendido (dirección positiva coincidente con la vertical hacia arriba):

$$E + B_2 - m_c \cdot g = 0$$

donde m_c indica la masa del cuerpo, E es el empuje debido al campo hidrostático y B_2 es la fuerza que hace la balanza 2.

Para el sistema recipiente + agua:

$$B_1 - E - (m_a + m_r) \cdot g = 0$$

donde m_a es la masa del agua contenida, m_r es la masa del recipiente y B_1 es la fuerza que realiza la balanza 1.

Dado que, en estas circunstancias, conocemos las indicaciones de las balanzas B_1 y B_2, despejando el empuje E de las ecuaciones anteriores e igualando, obtenemos:

$$m_c \cdot g = B_1 + B_2 - (m_a + m_r) \cdot g = 60\ kg + 35\ kg - (40 + 5)\ kg = 50\ kg$$

Ahora planteamos los balances de fuerzas en la segunda situación: cuando el cuerpo se saca fuera del líquido.

Para el cuerpo tenemos:

$$B_2 - m_c \cdot g = 0 \quad \Rightarrow B_2 = m_c \cdot g = 50\ kg$$

Para el recipiente + agua tenemos:

$$B_1 - (m_a + m_r) \cdot g = 0 \quad \Rightarrow B_1 = (m_a + m_r) \cdot g = (40 + 5)\ kg = 45\ kg$$

En consecuencia, las balanzas 1 y 2 indicarán $45\ kg$ y $50\ kg$ respectivamente, con lo cual la respuesta correcta es la (b).

Problema 20, Electricidad y magnetismo

Una autoinductancia real de $10\ H$ tiene una componente resistiva de $200\ \Omega$. La misma se conecta a una diferencia de potencial de $20\ V$. La intensidad final de corriente y la velocidad inicial de crecimiento de la corriente están dadas por:

a) $0{,}1\ A$ y $1\ \frac{A}{s}$

b) $1\ A$ y $0{,}1\ \frac{A}{s}$

c) $0{,}1\ A$ y $2\ \frac{A}{s}$

d) $2\ A$ y $0{,}1\ \frac{A}{s}$

e) $0{,}1\ A$ y $0{,}1\ \frac{A}{s}$

Respuesta

El potencial desarrollado por la inductancia es:

$$\varepsilon = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

donde L es la autoinductancia. En el instante inicial, este potencial es igual y opuesto al potencial aplicado. En consecuencia, la magnitud de la tasa inicial de crecimiento de la corriente es:

$$\left[\frac{dI}{dt}\right]_0 = \frac{V}{L} = \frac{20\ V}{10\ H} = 2\ \frac{A}{s}$$

A su vez, la intensidad final de la corriente está definida exclusivamente por el potencial impuesto ya que, en estas condiciones, el potencial de oposición de la inductancia es cero. En consecuencia,

$$i_f = \frac{V}{R} = \frac{20\ V}{200\ \Omega} = 0{,}1\ A$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (c).

Problema 21, Geometría

Sea Z el subconjunto de puntos de R^2 definido como

$$Z = \{(u, v) \in R^2 : 7u^2 + v^2 + 10uv = 1\}.$$

El conjunto Z es:

a) Una recta.

b) La unión de dos rectas.

c) Una parábola.

d) Una elipse.

e) Una hipérbola.

Respuesta

Expresando una sección cónica en forma general:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

el análisis del discriminante, $\mu = A \cdot C - B^2/4$, determina el tipo de cónica posible:

- Si $\mu < 0$, la ecuación representa una hipérbola o un par de líneas que se intersectan.
- Si $\mu = 0$, la ecuación representa una parábola o dos rectas paralelas (coincidentes o no).
- Si $\mu > 0$, la ecuación representa una elipse (o un círculo) o la solución vacía.

En el caso planteado, el discriminante tiene un valor $\mu = -18$, con lo cual las respuestas posibles son la (b) o la (e). Para analizar la existencia de una solución degenerada, planteamos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} F & D/2 & E/2 \\ D/2 & A & B/2 \\ E/2 & B/2 & C \end{pmatrix}$$

correspondiente a la notación matricial de la ecuación anterior: $x^T \cdot A \cdot x = 0$, donde $x^T = (1 \quad x \quad y)$.

Notar que el discriminante es el determinante del subsistema menor, obtenido por la remoción de la primer fila y columna.

Si el determinante de A es cero, la solución de la ecuación es lo que se denomina degeneramiento. Si el determinante de A es distinto de cero, la solución de la ecuación son las llamadas cónicas no degeneradas: elipse (círculo), parábola e hipérbola. En nuestro caso, el determinante de A resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = 18$$

Así, la ecuación tiene por solución a una hipérbola y la respuesta correcta es la (e).

Problema 22, Física general

Un 21 de marzo a una determinada hora, en un sitio A ubicado sobre el ecuador terrestre, un palo vertical de $1\ m$ de largo proyecta una sombra de $52\ cm$. Dos horas y 24 minutos más tarde, en otro lugar B (también sobre el ecuador), ubicado unos $4000\ km$ al oeste de A, otro palo vertical de $1\ m$ de largo proyecta la misma sombra. De estos datos se puede estimar que el radio de la Tierra es aproximadamente de:

a) $6200\ km$

b) $6270\ km$

c) $6320\ km$

d) $6370\ km$

e) $6430\ km$

Respuesta

Considerando que, en el transcurso de esta observación, el único movimiento relevante es la rotación de la Tierra, la igualdad de sombras sobre el Ecuador implica que la posición relativa entre el Sol y el punto que provoca la sombra es el mismo. Así, el punto B ocupa exactamente la misma posición que el punto A (salvo la traslación de la Tierra y considerando que el Sol está fijo, efectos que son menores y sobre los que no hay datos en este problema) al cabo de un cierto tiempo t durante el cual la Tierra rotó un ángulo $\Delta\theta$. Dado que ambos puntos ocupan la misma posición (a distintos tiempos), la longitud de arco correspondiente al ángulo subtendido por la rotación se corresponde con la distancia entre los puntos.

El arco recorrido es:

$$\Delta s = R\ .\ \Delta\theta$$

donde R es el radio de la Tierra y $\Delta\theta$ es el ángulo anterior, el cual viene dado por:

$$\Delta\theta = \omega\ .\ t$$

La velocidad angular de la Tierra, ω, es la rotación de 2π radianes al cabo de un día (período de rotación, T), o sea $\omega = 2\pi/T$. Reemplazando,

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{T}\ .\ t$$

Despejando el radio de la Tierra de la primera ecuación obtenemos:

$$R = \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{\Delta s}{2\pi t/T} = \frac{\Delta s\ .\ T}{2\pi\ .\ t}$$

Numéricamente:

$$R = \frac{4000\ km\ \cdot\ 1440\ min.}{2\pi\ \cdot\ 144\ min.} = 6366\ km$$

Así, el resultado correcto es la respuesta (d).

Problema 23, Oscilaciones y ondas

En un concierto al aire libre un violinista toca un La de frecuencia $440\ Hz$, que es percibido perfectamente por sus espectadores un día sin viento: ¿Cuál será la frecuencia con que percibirán los espectadores la misma nota, un día en que el viento es de $9\ \frac{m}{s}$ en dirección desde el público hacia el violinista? (Considerar que la velocidad del sonido en el aire es de $330\ \frac{m}{s}$).

a) $428\ Hz$

b) $428{,}32\ Hz$

c) $440\ Hz$

d) $452\ Hz$

e) $452{,}34\ Hz$

Respuesta

Dado que el emisor (violinista) y el receptor (público) no se encuentran en movimiento relativo, no hay corrimiento Doopler de la frecuencia. Esto es, el tono puro llega al público con la misma frecuencia con el que es emitido. En consecuencia, la respuesta correcta es la (c).

Problema 24, Cálculo

Sea α una constante real. Entonces el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ y}{x^2+\alpha\ y^3}$$

a) vale 0.

b) vale 1.

c) vale ∞.

d) depende del valor de α.

e) no existe.

Respuesta

En dos dimensiones, una condición necesaria para la existencia del límite es que el valor no dependa de la trayectoria utilizada para calcularlo.

En particular, vamos a acercarnos desde una recta genérica (esto es, realizamos un acercamiento simultáneo en x y en y con una dada relación entre ellos):

$$y = \beta x$$

Reemplazando,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ y}{x^2+\alpha\ y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ \beta x}{x^2+\alpha\ \beta^3 x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\beta\ x^2}{x^2(1+\alpha\ \beta^3\ x)}$$

Distinguimos dos casos: $\alpha = 0$ y $\alpha \neq 0$.
En el caso de $\alpha = 0$, tenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ y}{x^2+\alpha\ y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\beta\ x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \beta = \beta$$

En el caso de $\alpha \neq 0$, tenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ y}{x^2+\alpha\ y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\beta\ x^2}{x^2(1+\alpha\ \beta^3\ x)} = \beta$$

Esto es, independientemente del valor de α, el límite calculado según la trayectoria impuesta vale β. Así, el "límite"pedido depende de la trayectoria (vale lo que el valor de la pendiente, β) y, por lo tanto, no existe tal límite. En consecuencia, la respuesta correcta es la (e).

Problema 25, Calor y calorimetría

Dos placas paralelas infinitas están a temperaturas T_1 y T_2 respectivamente, ubicadas en el vacío. Una tercera placa infinita se coloca entre ambas. Las tres se comportan como “cuerpos negros”. La temperatura de equilibrio de la placa intermedia es:

a) $\sqrt[4]{\frac{T_1^4 - T_2^4}{2}}$

b) $\sqrt[4]{\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}}$

c) $\frac{T_1 + T_2}{2}$

d) $\frac{T_1 - T_2}{2}$

e) $\sqrt[8]{T_1^4 T_2^4}$

Respuesta

La siguiente figura ilustra la situación.

file=P25Graph.pdf,width=4.0cm

donde q_n indica la transferencia de calor por radiación por unidad de tiempo y de superficie del área expuesta a la temperatura T_n.

Este fenómeno es superficial y, consecuentemente, la placa i transfiere iguales cantidades a ambos lados de la misma. La placa 1 transfiere una cantidad q_1 y la placa 2 una cantidad q_2, ambas hacia la placa i (hacia sus otros lados también tranfieren pero no interesa para el balance). En condiciones de equilibrio, la cantidad de calor emitida debe ser igual a la cantidad de calor absorbida por los cuerpos.

Para cuerpos negros, la transferencia de calor radiativa por unidad de tiempo y de superficie viene dada por:

$$q_n = \sigma \cdot T_n^4$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann.

El balance para la placa intermedia es:

$$2 \cdot q_i = q_1 + q_2$$

Reemplazando la ley de transferencia y despejando:

$$2 \cdot \sigma \cdot T_i^4 = \sigma \cdot T_1^4 + \sigma \cdot T_2^4 \quad \Rightarrow \quad T_i = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}}$$

Así, la respuesta correcta es la (b).

Problema 26, Oscilaciones y ondas

Un tubo de $1\ m$ de altura, cerrado en un extremo, se llena con agua lentamente mientras en su abertura resuena un diapasón a una frecuencia de $330\ Hz$. La velocidad del sonido en el aire es de $330\ \frac{m}{s}$. Se escuchará un aumento en la intensidad del sonido cuando la altura del agua en el tubo sea de:

a) $25\ cm$ y $75\ cm$

b) $50\ cm$

c) $0\ cm$ y $50\ cm$

d) $33{,}3\ cm$ y $66{,}6\ cm$

e) $0\ cm$, $33{,}3\ cm$ y $66{,}6\ cm$

Respuesta

El desplazamiento de un elemento de aire respecto de su posición de equilibrio en una onda de sonido puede describirse mediante:

$$s(x,t) = s_{max} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

donde s_{max} es el máximo desplazamiento, ω es la velocidad angular de la onda, k es el número angular de onda ($k = \omega/v$, donde v es la velocidad del sonido) y la descripción tiene en cuenta el desplazamiento hacia las x positivas conforme aumenta t. La anterior es una de las descripciones posibles.

En el problema planteado, en el interior del tubo convivirán la onda de excitación y la onda reflejada. Ambas ondas tienen direcciones opuestas y parámetros de onda iguales; por ello, generan ondas estacionarias. Matemáticamente tenemos:

$$s_t(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = s_{max} \cdot \cos(kx - \omega t) + s_{max} \cdot \cos(-kx - \omega t - \theta)$$

donde θ indica una fase que determinamos a continuación, y suponemos una reflexión perfecta (con la misma intensidad que la incidente).

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} s_t(x,t) = s_{max} &\cdot [\cos(kx) \cdot \cos(\omega t) + \sin(kx) \cdot \sin(\omega t)] + \\ +s_{max} &\cdot [\cos(-kx) \cdot \cos(\omega t + \theta) + \sin(-kx) \cdot \sin(\omega t + \theta)] \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$, punto que está ubicado sobre el extremo cerrado del tubo (en contacto con el agua):

$$s_t(0,t) = s_{max} \cdot \cos(\omega t) + s_{max} \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

En este punto, el desplazamiento del aire no es posible y, por lo tanto, la anterior expresión debe igualarse a 0. Entonces tenemos:

$$s_t(0,t) = s_{max} \cdot [\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \theta)] = 0$$

Desarrollando $\cos(\omega t + \theta)$ obtenemos que la igualdad se satisface siempre para $\theta = (2n+1)\pi$. Por conveniencia, se suele utilizar $\theta = \pi$. De esta manera tenemos evaluada la condición de contorno adecuada.

Con el resultado anterior y mediante identidades trigonométricas (seno de la suma de ángulos y paridad de las funciones trigonométricas), la onda de sonido dentro del tubo finalmente es:

$$\begin{aligned} s_t(x,t) = s_{max} &\cdot [\cos(kx)\cdot\cos(\omega t) + \sin(kx)\cdot\sin(\omega t)] + \\ + s_{max} &\cdot [\cos(kx)\cdot(-\cos(\omega t)) + (-\sin(kx))\cdot(-\sin(\omega t))] \end{aligned}$$

Cancelando los términos iguales y opuestos:

$$s_t(x,t) = 2\cdot s_{max}\cdot\sin(kx)\cdot\sin(\omega t)$$

Este resultado se puede obtener directamente si se sabe que la onda reflejada puede describirse con una "intensidad"igual a $[-s_{max}]$ (proveniente de la condición de contorno que evaluamos), con una dirección opuesta a la incidente.

La anterior expresión indica una onda temporal modulada en el espacio. La intensidad será máxima en aquellos puntos en que $\sin(kx)$ sea máximo; o sea,

$$kx_{max} = \frac{1+2n}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad x_{max} = \frac{1+2n}{2}\cdot\frac{\pi}{k}$$

Obteniendo el número angular de onda:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = 2\pi\frac{330\ s^{-1}}{330\ m/s} = 2\pi\ m^{-1}$$

En consecuencia, los puntos de máxima intensidad (dentro del tubo, lugar donde vale la onda estacionaria) son:

$$\begin{aligned} x_{max,1} &= \frac{\pi/2}{2\pi\ m^{-1}} = 0{,}25\ m \\ x_{max,2} &= \frac{3\pi/2}{2\pi\ m^{-1}} = 0{,}75\ m \end{aligned}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

Problema 27, Cálculo

El límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\ln(x+1)]^2}{e^{2x}-1}$$

vale:

a) -1

b) 0

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

e) 2

Respuesta

El límite pedido es del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$. En consecuencia, podemos aplicar la regla de L'Hopital. Derivando tanto el numerador como el denominador y ordenando, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\ln(x+1)]^2}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2\ln(x+1).\frac{1}{x+1}}{2e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{e^{2x}.(x+1)}$$

La indeterminación no se encuentra presente en las derivadas. Evaluando estas últimas obtenemos que el límite es igual a 0. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (b).

Problema 28, Mecánica del punto

Un auto baja por una calle que tiene una inclinación de $30°$ a una velocidad de $20\ \frac{m}{s}$. El conductor aprieta súbita y fuertemente el pedal del freno para evitar atropellar a un perro. Las ruedas se bloquean, dejando una huella de $30\ m$ hasta que el auto se detiene completamente. ¿Cuánto vale el coeficiente de rozamiento dinámico de los neumáticos con el pavimento?

a) 0,21

b) 0,68

c) 0,79

d) 1,36

e) 1,82

Respuesta

Planteamos los balances de fuerzas en las direcciones paralela y normal al plano inclinado. Para la componente normal:

$$N - m\ g\ \cos(30°) = 0 \quad \Rightarrow \quad N = m\ g\ \cos(30°)$$

donde N indica la fuerza normal del piso sobre el auto.

El balance en la dirección paralela es:

$$f_r - m\ g\ \sin(30°) = m\ a$$

donde f_r indica la fuerza de rozamiento dinámico y a la desaceleración.

Dado que las fuerzas aplicadas no dependen del tiempo, la desaceleración es constante.

De la cinemámica del movimiento sabemos que:

$$v = v_0 - a\ t$$

$$x - x_0 = v_0\ t - \frac{1}{2} a\ t^2$$

Evaluando el momento en que el auto frena completamente,

$$0 = v_0 - a\ t_f \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{v_0}{a}$$

$$d = v_0\ t_f - \frac{1}{2} a\ t_f^2$$

donde d es la distancia recorrida hasta que el auto se detiene. Operando con ambas ecuaciones obtenemos:

$$a = \frac{v_0^2}{2d}$$

Por otro lado, la fuerza de rozamiento dinámico se caracteriza mediante:

$$f_r = \mu_c\ N$$

donde μ_c es el coeficiente de rozamiento dinámico. Reemplazando el valor de la fuerza normal obtenido:

$$f_r = \mu_c\ m\ g\ \cos(30°)$$

Reemplazando los resultados obtenidos para f_r y a en la ecuación del balance de fuerzas en la dirección paralela al plano inclinado:

$$\mu_c\ m\ g\ \cos(30°) - m\ g\ \sin(30°) = m\ \frac{v_0^2}{2d}$$

Despejando el coeficiente:

$$\mu_c = \frac{\frac{v_0^2}{2d} + g\ \sin(30°)}{g\ \cos(30°)}$$

Numéricamente:

$$\mu_c = 1{,}363$$

De modo que la respuesta correcta es la (d).

Problema 29, Mecánica del punto

Una bala de masa m y velocidad v se desplaza en dirección horizontal y se incrusta en un bloque de masa M, inicialmente en reposo, que cuelga de un hilo. La distancia desde el centro de masa del bloque hasta el punto del que pende el hilo es L. Luego del impacto, el sistema oscila con una amplitud pequeña. Si g es la aceleración de la gravedad, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) El período de oscilación del sistema depende de L y de v.

b) El período de oscilación del sistema depende de L y de m.

c) La máxima altura que alcanza la masa, medida desde la posición inicial, es $\frac{mv^2}{2Mg}$

d) La máxima altura que alcanza la masa, medida desde la posición inicial, es $\frac{m^2v^2}{2(m+M)^2g}$

e) La máxima velocidad que alcanza la masa es $\sqrt{\frac{m}{m+M}}v$

Respuesta

Luego del impacto, la bala queda incrustada en el bloque de masa M. En consecuencia, el proceso de colisión (plástica) puede describirse mediante la conservación del momento lineal:

$$m\,v = (M+m)\,v_f$$

Despejando; la velocidad del bloque M con la bala m incrustada, luego del impacto, es:

$$v_f = \frac{m}{M+m}\,v$$

Luego del impacto, el sistema comienza a pendular. El período de oscilación corresponde al de un péndulo simple de masa $M+m$,

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

Por lo tanto, las respuestas (a)y (b) son incorrectas.

Veamos la altura que alcanza el sistema. La energía inicial del mismo, inmediatamente después de producida la colisión, es:

$$E = \frac{1}{2}(M+m)\,v_f^2$$

donde hemos considerado que el nivel cero de la energía potencial es aquél correspondiente a la posición inicial. La altura máxima (con respecto al nivel inicial) se alcanza cuando toda la energía se convierte en energía potencial. Esto es:

$$E = (M+m)\,g\,h$$

Por conservación de la energía (válida luego de producida la colisión) podemos igualar las anteriores, obteniendo:

$$\frac{1}{2}(M+m)\,v_f^2 = (M+m)\,g\,h \quad\Rightarrow\quad h = \frac{v_f^2}{2g} = \frac{m^2\,v^2}{2\,(m+M)^2\,g}$$

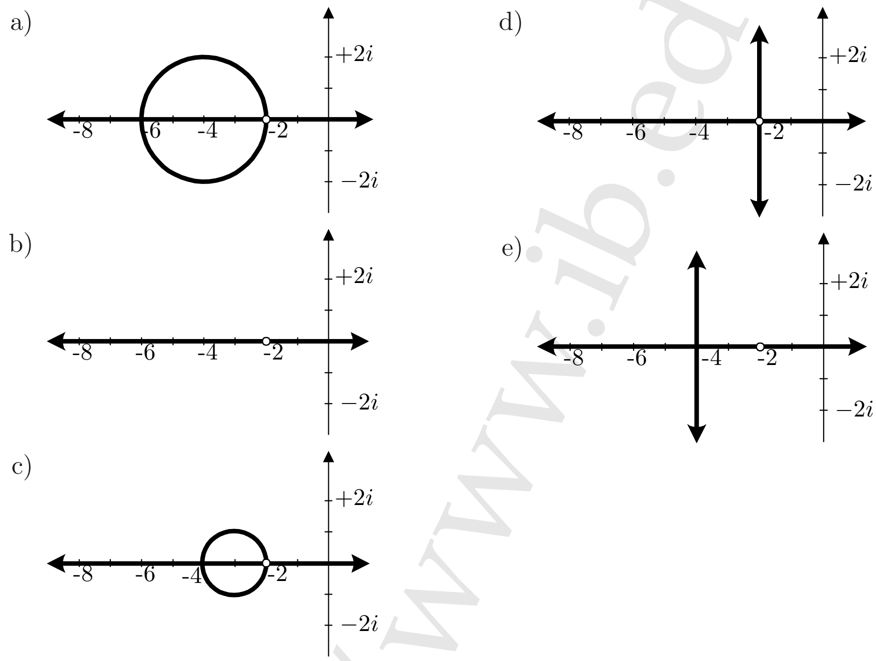
En consecuencia, la respuesta correcta es la (d).

Problema 30, Cálculo

Sea $f : C \to C$ la función

$$f(z) = \frac{(z+4)}{(z+2)^2}$$

¿Cuál de las siguientes figuras representa el conjunto de todos los puntos z del plano complejo C cuya imagen por la función f es real?
Aclaración: Los pequeños círculos alrededor de $z = -2$ en las figuras indican que este punto en particular está excluído del conjunto.



Respuesta

Llamemos $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ a los elementos del dominio cuya imagen según f es real. Así:

$$f(z_1) = \frac{(z_1+4)}{(z_1+2)^2} = \frac{[(x_1+4)+i\cdot y_1]}{[(x_1+2)+i\cdot y_1]^2} = \frac{[(x_1+4)+i\cdot y_1]}{[(x_1+2)^2-y_1^2]+i\cdot 2\cdot(x_1+2)\cdot y_1}$$

Multiplicando y dividiendo por $\{[(x_1+2)^2-y_1^2]-i\cdot 2\cdot(x_1+2)\cdot y_1\}$ obtenemos:

$$f(z_1) = \frac{[(x_1+4)+i\cdot y_1]\cdot\{[(x_1+2)^2-y_1^2]-i\cdot 2\cdot(x_1+2)\cdot y_1\}}{[(x_1+2)^2-y_1^2]^2+[2\cdot(x_1+2)\cdot y_1]^2}$$

La parte imaginaria de la función corresponde a:

$$\Im[f(z_1)] = \frac{y_1\cdot[(x_1+2)^2-y_1^2]-2\cdot(x_1+4)\cdot(x_1+2)\cdot y_1}{[(x_1+2)^2-y_1^2]^2+[2\cdot(x_1+2)\cdot y_1]^2}$$

Operando algebraicamente podemos ver que el denominador corresponde al desarrollo de un cuadrado:

$$[(x_1+2)^2-y_1^2]^2+[2\cdot(x_1+2)\cdot y_1]^2 = ... = [(x_1+2)^2+y_1]^2 \quad (17)$$

De esta manera, la parte imaginaria de la función queda:

$$\Im[f(z_1)] = \frac{y_1 \cdot \{(x_1+2)^2 - 2\cdot(x_1+4)\cdot(x_1+2) - y_1^2\}}{[(x_1+2)^2 + y_1]^2}$$

Operando algebraicamente sobre el numerador obtenemos:

$$y_1 \cdot \{(x_1+2)^2 - 2\cdot(x_1+4)\cdot(x_1+2) - y_1^2\} = ... = y_1 \cdot \{-x_1^2 - 8\cdot x_1 - 12 - y_1^2\}$$

Completando cuadrados en x obtenemos:

$$y_1 \cdot \{(x_1+2)^2 - 2\cdot(x_1+4)\cdot(x_1+2) - y_1^2\} = -y_1 \cdot \{(x_1+4)^2 + y_1^2 - 4\}$$

De esta manera:

$$\Im[f(z_1)] = -\frac{y_1 \cdot \{(x_1+4)^2 + y_1^2 - 4\}}{[(x_1+2)^2 + y_1]^2}$$

Dado que z_1 indica aquellos elementos del dominio con imagen real, la parte imaginaria de $f(z_1)$ debe ser cero. Así, el numerador de la expresión anterior debe anularse. Una solución es la recta $y_1 = 0$ y la otra corresponde a un círculo centrado en $(x,y) = (-4,0)$ de radio 2. Los puntos además deben pertenecer al dominio. De la función original vemos que el dominio corresponde a todos los reales excepto el punto $(x,y) = (-2,0)$, el cual asimismo anula el denominador de la parte imaginaria de f.

Resumiendo, el conjunto de puntos que tiene imagen real al aplicarse f es:

$$S = \{(x,y) \in \{R^2 - (x,y) = (-2,0)\} : y = 0 \quad \vee \quad (x+4)^2 + y^2 = 4\}$$

El conjunto solución se corresponde con la gráfica mostrada en la respuesta (a), la cual es la respuesta correcta.