Examen 2006

Problema 1, Mecánica

Sabiendo que la luz del Sol tarda aproximadamente 8 minutos en alcanzar la Tierra, se puede estimar que la velocidad de la Tierra en su órbita es:

a) 10 $\frac{km}{h}$

b) 100 $\frac{km}{h}$

c) 1000 $\frac{km}{h}$

d) 10000 $\frac{km}{h}$

e) 100000 $\frac{km}{h}$

Pista

E l hecho de que la luz tarde 8 min. en llegar desde el sol a la tierra te permite conocer la distancia que los separa. Si suponés (con buena aproximación) que la órbita terrestre es circular, podés calcular el recorrido de la tierra en un año a partir de conocer el radio de esa órbita circular, o sea, la distancia que calculaste.

Respuesta

C onociendo la distancia que recorre la tierra en una vuelta alrededor del sol y sabiendo que la recorre en 8760 h (365 días) llegás a la respuesta 'e)'.

Problema 2, Mecánica

Una patinadora sobre hielo está girando sobre sí misma con cierta velocidad angular. Repentinamente ella extiende sus brazos y su velocidad de rotación disminuye. Esto sucede:

a) porque redistribuye su masa aumentando el rozamiento con el hielo.

b) porque la energía de su movimiento se conserva.

c) porque el impulso lineal de la patinadora se conserva.

d) porque el momento de inercia de la patinadora aumenta.

e) por alguna otra razón.

Respuesta

U n cuerpo que no está sometido a fuerzas externas conserva su momento angular, que es el producto de la velocidad angular y el momento de inercia. Si el momento de inercia aumenta porque la patinadora abrió los brazos, entonces la velocidad angular disminuirá de modo de **conservar el momento angular. Respuesta ’d)’.**

Problema 3, Matemática

La recta $x - 2y + 2 = 0$ corta la hipérbola $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ en:

a) un único punto.

b) ningún punto.

c) dos puntos, con $x > 0$.

d) dos puntos, con $x < 0$.

e) dos puntos, uno con $x > 0$ y otro con $x < 0$.

Pista

L a manera convencional de resolver el problema sería expresando explícitamente $y(x)$ para cada curva, igualar las expresiones y resolver la ecuación en x que arroja los valores de corte.

Pista

P or otro lado, viendo que la recta pasa por $(x, y) = (0, 1)$ y que tiene pendiente $1/2$, y que además la hipérbola está centrada en $(x, y) = (0, 0)$ y que tiene pendiente asintótica de $3/2$, es de esperar que haya un cruce en cada semieje de x.

Respuesta

L a respuesta es 'e)', hay un cruce en cada semieje de x.

Problema 4, Electromagnetismo

Un capacitor plano de caras paralelas tiene una capacidad C y está conectado a una batería de tensión V. Se desconecta la batería y luego se modifica la distancia entre las placas hasta llevarla al doble de su valor inicial. ¿Qué ocurre en el capacitor?

a) No se modifican el potencial ni la carga acumulada.

b) El potencial entre las placas se duplica.

c) El potencial entre las placas disminuye a la mitad.

d) La carga acumulada se duplica.

e) La carga acumulada disminuye a la mitad.

Pista

L a capacidad (C) de un capacitor de placas planas paralelas es proporcional a A/d, siendo A él área de una de las placas y d la distancia que las separa.

Pista

D ado que se desconecta la batería, la carga (Q) acumulada en el capacitor no variará, pues no hay conductores conectados en los bornes.

Respuesta

L a tensión en los bornes (V=Q/C) al mantener la carga constante y aumentar la distancia de separación entre las placas al doble (disminuir la capacidad a la mitad), se duplica. Respuesta 'b)'.

Problema 5, Electromagnetismo

En un circuito LC con cables de resistencia nula, la corriente eléctrica oscila. ¿Por qué la oscilación no se detiene cuando el capacitor ha quedado completamente descargado?

a) Por la inercia de los electrones.

b) Porque el capacitor tiene memoria de su estado inicial.

c) Porque el campo eléctrico en el capacitor no es nulo.

d) Porque el campo magnético en la bobina es nulo.

e) Porque la bobina se opone a que el campo magnético cambie.

Pista

C uando un sistema oscila, por ejemplo, un péndulo, la energía se almacena alternadamente en dos formas, cinética (posición equilibrio) y potencial (extremos). En un circuito eléctrico que oscila, la energia también se almacena en dos formas.

Pista

P ara generar un campo magnético, hace falta energía, y esta energía queda almacenada en el campo. Esta energía vuelve al conductor en forma de corriente eléctrica cuando el flujo encerrado por la bobina varía.

Respuesta

L a respuesta correcta es ’e)’, la energía almacenada en el campo vuelve al conductor (circuito LC) ’porque la bobina se opone a que el campo magnético cambie’.

Problema 6, Probabilidad

La probabilidad de que un transistor comercial esté fallado es $10^{-}4$. Se construye un equipo con 10^3 transistores, para cuyo funcionamiento correcto es necesario que todos los transistores operen sin fallas. La probabilidad de que un equipo de ese tipo esté fallado es aproximadamente:

a) 0.000

b) 0.095

c) 0.100

d) 0.905

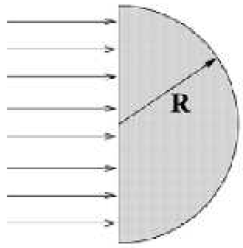
e) 1.000

Respuesta

D ado que se considera que el equipo está fallado si uno cualquiera de los 10^3 transistores falla, la probabilidad de falla del equipo es sencillamente la suma 10^3 veces de la probabilidad de falla de un transistor (10^4) $\Rightarrow$ $0{,}1$, opción 'c)'.

Problema 7, Óptica

Una lente semiesférica de radio R e índice de refracción $n > 1$, se encuentra inmersa en aire y recibe perpendicularmente sobre su cara plana un haz de luz, que la cubre completamente, ¿Cuál de estas afirmaciones es correcta?



a) Todos los rayos incidentes se refractan en la cara esférica.

b) Sólo los rayos apartados del eje óptico una distancia menor que una cierta distancia R_0 se refractan en la cara esférica.

c) Sólo los rayos apartados del eje óptico una distancia mayor que una cierta distancia R_0 se refractan en la cara esférica

d) Los rayos refractados en la cara esférica convergen exactamente en un punto, que es el foco imagen del sistema óptico.

e) El foco imagen del sistema óptico es virtual.

Pista

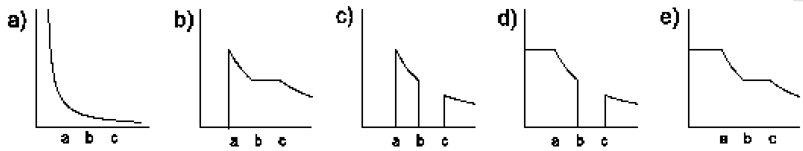
U n rayo que incide sobre algún punto de la superficie semiesférica se comportará en función el ángulo que forme su dirección con la normal a la superficie en ese punto. El fenómeno de refracción sólo ocurre cuando este ángulo es menor que un ángulo límite (que depende del cociente entre los coeficientes de refracción del vidrio y aire).

Respuesta

L a respuesta es 'b)'.

Problema 8, Magnetismo

Una esfera metálica de radio a tiene una carga neta q. Esta esfera está ubicada en el centro de otra esfera metálica hueca de radio interior b y radio exterior c, cuya carga neta es nula. El campo eléctrico en función de la distancia al centro de las esferas está representado cualitativamente por la figura:



Pista

P ara esta problema basta recordar que la cantidad de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por la misma. A la vez y como consecuencia de la conducción en los metales, en el espesor de las esferas metálicas no hay campo.

Respuesta

L a respuesta correcta es 'c)'.

Problema 9, Matemática

Se define la función $f : C \to \Re$ como $f(z) = |z - 3|$ y el conjunto $A = \{z \in C : |z - i| \leq 1\}$, donde $i^2 = -1$.
Entre los siguientes números, algunos tienen la propiedad de ser mayores que $f(z)$ para cualquier $z \in A$. Hallar el menor de los números listados con esa propiedad.

a) 4.81

b) 4.48

c) 4.12

d) 3.61

e) 3.16

Pista

A ntes que nada veamos qué forma tiene $f(z)$. Se trata de un cono de eje vertical que toca al plano z en $z = 3$. La región A es un círculo centrado en $z = i$.

Pista

E l mayor valor de $f(z)$ en la región A se encontrará, dado que $f(z)$ crece con la distancia a $z = 3$, ubicado sobre la recta que une los centros del cono ($z = 3$) y de la región A ($z = i$) y, obviamente, en el radio de A que apunta en el sentido de alejarse del centro del cono. Este punto más alejado se encuentra, aplicando simple Pitágoras en el plano z, a una distancia $\sqrt{10} + 1$.

Respuesta

L a respuesta correcta es la 'b)'.

Problema 10, Magnetismo

El módulo de la inducción magnética en el punto P en las cercanías de un conductor por el cual circula una corriente i, como el que se muestra en la figura, es:

a) $\frac{\mu_0 i}{4a^2}$

b) $\frac{\mu_0 i}{4a}$

c) $\frac{\mu_0 i^2}{4a^2}$

d) $\frac{\epsilon_0 i}{4a}$

e) $\frac{\mu_0 i a}{4}$

Pista

P ara este problema hay que sumar la contribución de cada tramo de conductor al campo en el punto P. La contribución de cada tramo se evalua con la ecuación de Biot - Savart:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l \times \vec{R}}{R^3}.$$

A la suma se la realiza integrando sólo en el tramo curvo, pues ambos tramos rectos tienen producto vectorial nulo con **R**.

Respuesta

L a respuesta es la 'b)'.

Problema 11, Mecánica

Un planeta del sistema solar describe su órbita aproximadamente dentro de un plano. Esto es:

a) debido a que la interacción gravitatoria con sus satélites lo obliga a mantener esa órbita.

b) debido a que la fuerza gravitatoria solar no modifica el impulso angular del planeta en su órbita.

c) debido a que el planeta tiene una rotación sobre su eje.

d) debido a que el campo magnético del planeta interactúa con el campo magnético solar.

e) falso.

Respuesta

L a opción correcta es 'b)'.

Problema 12, Matemática

El conjunto de soluciones en $\Re^3$ del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + y - 3z &= -2 \\ 3y + 9z &= 6. \end{aligned}$$

es:

a) el conjunto vacío.

b) un punto en $\Re^3$.

c) una recta en $\Re^3$.

d) un plano en $\Re^3$.

e) una esfera en $\Re^3$.

Respuesta

S ustituyendo una ecuación en otra y repitiendo el proceso, una de las ecuaciones desaparece, lo que deja en evidencia que las tres ecuaciones no son linealmente independientes. Por lo tanto, la solución está dada por una recta en el espacio. Respuesta 'c)'.

Problema 13, Ondas

El hecho de que al acercarse a la esquina de una cuadra se pueda escuchar a las personas que vienen caminando hacia la misma esquina por la vereda perpendicular de la misma manzana se debe:

a) al fenómeno de interferencia de las ondas de sonido.

b) al efecto de Doppler por el movimiento de las personas acercándose a la esquina.

c) a que el viento lleva el sonido hacia el oyente.

d) al fenómeno de difracción de las ondas sonoras.

e) a la refracción de las ondas sonoras en el aire.

Pista

A este problema se lo puede resolver por descarte, ya que si bien todos los fenómenos expresados se presentan en el sonido (por ser una onda), sólo uno de ellos es coherente con el sonido que se aprecia al caminar hacia una esquina:

- por interferencia se apreciarían variaciones de intensidad en el sonido
- el Doppler siempre está presente, pero a la velocidad que camina una persona no es perceptible, además no explica porqué el sonido 'dobla la esquina'
- el viento no siempre está presente, sin embargo siempre se observa el fenómeno
- la refracción, salvo cambio de medio, ocurre en línea recta.

Respuesta

La respuesta es la 'd)'.

Problema 14, Hidrostática

Un tanque contiene un líquido de densidad $1{,}1\frac{g}{cm^3}$. Es necesario trasvasar este líquido desde el tanque donde está hacia otro tanque cercano. Entre ambos existe una pared de $10m$ de altura por encima del nivel del tanque lleno. Alguien sugiere hacerlo por medio de un sifón, como se muestra en la figura. Este método:

a) permite trasvasar todo el líquido sin problemas.

b) permite trasvasar todo el líquido pero demora tiempo infinito en hacerlo.

c) permite trasvasar la mitad del líquido de un tanque a otro.

d) permite trasvasar líquido sólo hasta que los niveles en los tanques se igualen.

e) no sirve para trasvasar líquido de un tanque al otro.

Pista

C uando se trasvasa líquido de un recipiente a otro, al hacer succión en un extremo del conducto, el líquido avanza porque es empujado por la presión en el otro extremo (normalmente presión atmosférica). Cuando el conducto está vertical (o en algún ángulo con componente vertical), el líquido avanza hasta que la columna de líquido compense la presión que la empuja.

Pista

E n el ejercicio el líquido de densidad $1{,}1\frac{g}{cm^3}$ debe subir una altura de $10m$, con lo cual su columna ejercería una presión de $1{,}1\frac{Kg}{cm^2} > 1atm$. Por lo tanto el líquido no alcanzaría a cruzar la pared.

Respuesta

L a respuesta es 'e)'.

Problema 15, Matemática

Sabiendo que $h : \Re \rightarrow \Re$ es una función continua, el valor de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{x-t}^{x+t} \quad h(s)\mathrm{d}s$$

es:

a) $2h(x+t)$

b) $h(x+t) + h(x-t)$

c) $h(x+t) - h(x-t)$

d) $-h(x+t) + h(x-t)$

e) $-h(x+t) - h(x-t)$

Pista

T ratándose de una derivada bajo el signo integral, tenemos que aplicar la regla general de Leibniz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(t,x)\mathrm{d}t = g(f_2(x),x)\ f_2'(x) - g(f_1(x),x)\ f_1'(x) + \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial}{\partial x} g(t,x)\mathrm{d}t$$

Respuesta

L a respuesta es 'b)'.

Problema 16, Calor y Calorimetría

Una mezcla de hielo y agua se encuentra dentro de un recipiente adiabático. Mediante una resistencia se le entrega calor a un ritmo constante y se observa que la temperatura evoluciona como lo indica el gráfico. Sabiendo que el calor específico del agua es $1\frac{cal}{gC}$ y el calor de fusión del hielo es $80\frac{cal}{g}$, la proporción entre las masas de hielo y agua en la mezcla era inicialmente:

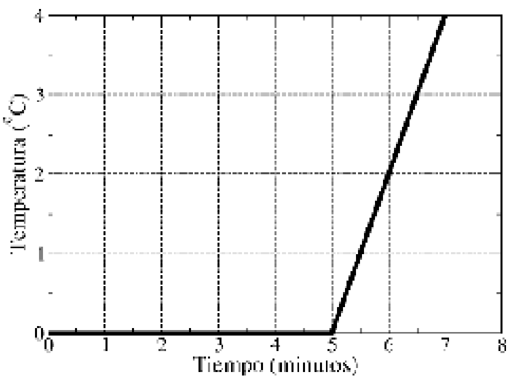
a) 1/7

b) 1/5

c) 2/15

d) 1/8

e) 1/2



Pista

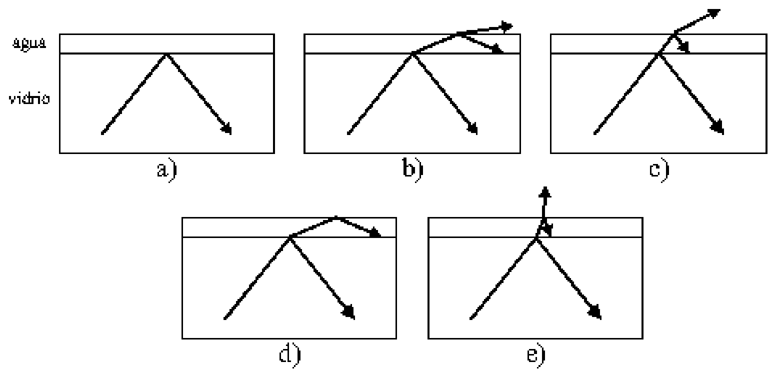
C on la pendiente de la curva entre los segundos 5 y 7 se puede conocer, a partir del calor específico del agua (pues en ese momento todo el hielo ya se ha derretido y por eso la temperatura puede subir), el calor entregado por unidad de tiempo y masa. Con ese ritmo de calor entregado se puede, a partir del calor de fusión del hielo, inferir las proporciones de masa en la mezcla original.

Respuesta

L a respuesta es 'a)'.

Problema 17, Óptica

Un haz de luz dentro de un cuerpo de vidrio incide sobre la superficie plana que el mismo forma con el aire con un ángulo apenas mayor al ángulo crítico. Se coloca luego una película delgada de agua sobre esta superficie. ¿Cuál esquema representa correctamente el recorrido del haz de luz? (Datos: Los índices de refracción del vidrio y del agua son 1.5 y 1.33 respectivamente).



Pista

C uando un haz de luz cambia de medio pasando a uno de menor índice de refracción, se presenta el fenómeno de ángulo crítico. Como consecuencia de este fenómeno, todos los rayos con un ángulo de incidencia mayor que el ángulo crítico son reflejados, no hay refracción. Este ángulo crítico puede calcularse con la ley de Snell poniendo como ángulo de salida del haz $\pi/2$.

Pista

P ropagando el haz incidente (a más de 41.8^0) hacia el agua con la ley de Snell, se encuentra que el ángulo de propagación del haz en el agua es de nuevo igual o mayor que el ángulo crítico entre el agua y aire. Por lo tanto el haz no podrá salir de la película de agua.

Respuesta

L a respuesta es 'd)'.

Problema 18, Matemática

Se sabe que la función $f : \Re^2 \rightarrow \Re$ tiene derivadas quintas continuas en todo su dominio y que para $p = (-1, 3)$ vale: $f(p) = 2$, $\nabla f(p) = (0, 0)$ y

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe mejor el comportamiento de f en base a los datos proporcionados en el enunciado?

a) $f(2, -7) \leq 2$

b) $f(2, -7) \geq 2$

c) $f(q) \geq 2$ para todo q suficientemente cerca de p.

d) $f(q) \leq 2$ para todo q suficientemente cerca de p.

e) Hay dos rectas que pasan por p, de modo que f restringida a la primera recta tiene un máximo en p y f restringida a la otra tiene un mínimo en p.

Pista

P rimero discutamos sobre la forma de f. Se trata de algo similar a un paraboloide de revolución, con concavidad positiva (la parte útil de una copa de vino). Esto se concluye de observar los signos de los autovalores del Hessiano. Al ser todos los autovalores positivos, la matriz es definida positiva, que significa que en el punto p, f tiene un mínimo.

Respuesta

D ado que se trata de un mínimo, tienen cierto grado de verdad los enunciados 'b)' y 'c)'. Por tratarse de conclusiones sacadas de las derivadas en el punto, sólo se pueden aplicar a las inmediaciones de dicho punto. Por lo tanto la respuesta correcta es 'c)'.

Problema 19, Calor y Calorimetría

Dos reglas de acero tienen aproximadamente un metro de longitud. Una es exacta a $273\ K$ y la otra lo es a $298\ K$. ¿Cuál es la diferencia entre sus longitudes a $294\ K$? El coeficiente de dilatación lineal del acero es $\alpha = 12x10^{-6}K^{-1}$.

a) $0{,}06mm$

b) $0{,}12mm$

c) $0{,}18mm$

d) $0{,}24mm$

e) $0{,}30mm$

Pista

P ara este problema basta con hacer dos cuentitas. Por un lado calcular la dilatación de la primera regla al calentarse desde $273\ K$ hasta $294\ K$ y la contracción de la segunda al pasar de $298\ K$ a $294\ K$. Luego calcular la diferencia de sus nuevas longitudes.

Respuesta

L a respuesta es 'e)'.

Problema 20, Magnetismo

Una partícula puntual de carga Q se mueve en un campo magnético $\vec{B}$ uniforme en el espacio y constante en el tiempo. En el instante inicial la velocidad de la partícula, $\vec{v_0}$, es perpendicular a $\vec{B}$. Si se consideran los siguientes enunciados:

I) durante el movimiento se conserva la energía,

II) durante el movimiento se conserva el momento lineal,

III) durante el movimiento existe un punto respecto del cual se conserva el momento angular,

IV) la trayectoria es circular,

V) la trayectoria es helicoidal,

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Sólo I es correcta.

b) Sólo I y IV son correctas.

c) Sólo III y V son correctas.

d) Sólo III y IV son correctas.

e) Sólo I, III y IV son correctas.

Pista

L a fuerza ejercida sobre la partícula es perpendicular a su dirección de movimiento ($\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$), que es también perpendicular al campo $\vec{B}$. Por esta razón, la fuerza no realiza trabajo ('I)' es verdadera) pero altera el momento lineal ('II)' es falsa). Dado que la fuerza y la velocidad inicial están en un plano perpendicular a $\vec{B}$, la trayectoria es circular ('IV)' es verdadera, junto con 'III)' y 'V)' es falsa).

Respuesta

L a respuesta es 'e)'.

Problema 21, Matemática

Sea v un autovector de la matriz inversible A. Dadas las siguientes afirmaciones:

I) v también es autovector de $7A$,

II) v también es autovector de la matriz transpuesta de A,

III) v también es autovector de A^{-1},

¿cuál de los siguientes enunciados es siempre verdadero?

a) I, II y III son correctas.

b) Sólo I y II son correctas.

c) Sólo I y III son correctas.

d) Sólo I es correcta.

e) Sólo II es correcta.

Pista

S iendo v un autovector de A, se verifica entonces $A\,v = \lambda\,v$. El producto del primer miembro puede ser también $v\,A$, pero cualquiera sea la definición que se adopte, debe mantenerse, no se puede conmutar el producto. Se debe entonces evaluar multiplicando por 7, transponiendo, o premultiplicando por A^{-1} cada miembro de la igualdad, el grado de veracidad de los enunciados I), II) y III).

Respuesta

H aciendo lo que dice más arriba, se llega a que I) y III) son verdaderos, con autovalores $7\,\lambda$ y $1/\lambda$ respectivamente. El enunciado II) es falso porque no se puede conmutar el producto $A\,v$, como dice más arriba. Por lo tanto la respuesta correcta es la 'c)'.

Problema 22, Mecánica

Un péndulo, formado por una masa M que cuelga de un hilo de masa despreciable de longitud L, se encuentra en la superficie de la Tierra. En la superficie de otro planeta, en el cual la aceleración de la gravedad es 3 veces menor que en la superficie de la Tierra, se encuentra un péndulo similar, de masa M' y longitud L'. ¿Con cuál de las siguientes combinaciones de M' y L' tendrían los dos péndulos igual período?

a) $M' = \frac{M}{3}; L' = L$

b) $M' = M; L' = 3L$

c) $M' = 9M; L' = \frac{L}{3}$

d) $M' = M; L' = \frac{L}{9}$

e) Ninguna de las anteriores.

Pista

E l período de un péndulo no depende de la masa del mismo, sólo de su longitud y de la aceleración de la gravedad. Más precisamente, $T = \sqrt{\frac{L}{g}}$. Igualando el período del péndulo de longitud L en una aceleración g, al período del péndulo de longitud L' en una aceleración $\frac{g}{3}$ se llega directamente a la relación de longitudes necesaria para que los períodos sean iguales.

Respuesta

L a respuesta es 'c)'.

Problema 23, Electricidad

La máxima potencia que puede disipar cada una de las resistencias R de la figura es W. La máxima potencia que puede disipar el circuito es:

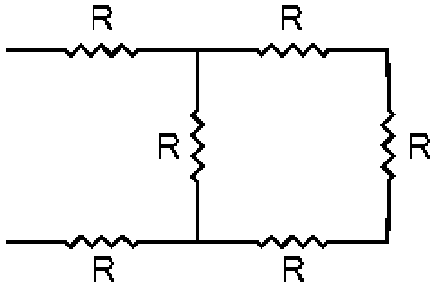
a) $2W$

b) $2{,}50W$

c) $2{,}75W$

d) $3W$

e) $6W$



Pista

P ara encontrar la respuesta es necesaria al menos una resolución parcial del circuito. Se sabe que cada resistencia puede disipar como máximo una potencia W. Esta potencia limita la corriente en los conductores de entrada y salida del circuito a $I_t = \sqrt{\frac{W}{R}}$, pues se encuentran en esos conductores dos resistencias en serie por las que atravesará toda esta corriente. Esto da lugar a que se disipen $2W$ en esas resistencias. Resta conocer cuánto se disipa en las dos ramas paralelas del circuito.

Pista

E n las dos ramas paralelas (a y b) la corriente circulará en cantidades inversas a sus resistencias, pues ambas ramas están sometidas a la misma tensión: $I_a R_a = I_b R_b$. Además, estas dos corrientes deben sumar $I_t = I_a + I_b$. Sabiendo que las resistencias de cada rama valen $R_a = R$ y $R_b = 3R$ y resolviendo estas ecuaciones se llega a que $I_a = \frac{3}{4} I_t$ y que $I_b = \frac{I_t}{4}$. La potencia que se disipa en estas dos ramas es entonces $0{,}75W$ ($W_{paralelo} = I_a^2 R_a + I_b^2 R_b$).

Respuesta

L a respuesta es ’c)’.

Problema 24, Matemáticas

La suma $1 + \frac{1}{2}x^2$ corresponde a los primeros términos de la serie de Taylor centrada en $x = 0$ de la función...

a) $\frac{sen(2x)}{x}$

b) $cos(2x)$

c) $e^{-\frac{1}{2}x^2}$

d) $ln(e + x^2)$

e) $\sqrt{1 + x^2}$

Pista

P ara este ejercicio lo que sin dudas funciona es calcular los dos primeros términos de la serie de taylor ($= \sum_{i=0}^{\text{ínf}} \frac{1}{n!} f(x)^{(n)}|_p (x-p)^n$) para cada función y ver qué resultado coincide con el que se muestra en el enunciado. Lo que puede ayudar mucho es tener mucha práctica y conocer el resultado sin calcularlo, o bien, ir probando de a una comenzando por la que parezca más sencilla.

Respuesta

L a Respuesta es 'e)'.

Problema 25, Ondas

El dispositivo de la figura está inicialmente en reposo. La cuerda de longitud L que une las dos masas que cuelgan verticalmente se pulsa y empieza a vibrar en una frecuencia audible. A continuación se corta el hilo H, y las masas empiezan a moverse. La cuerda vibrante:

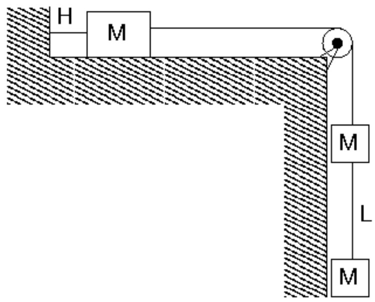
a) suena con una frecuencia más grave (más baja), constante en el tiempo.

b) suena con una frecuencia más aguda (más alta), constante en el tiempo.

c) sigue sonando con la misma frecuencia.

d) suena con una frecuencia que se hace más grave (más baja) conforme el sistema se acelera.

e) suena con una frecuencia que se hace más aguda (más alta) conforme el sistema se acelera.



Pista

L a frecuencia de vibración de una cuerda es proporcional a la tensión (de tracción) a la que está sometida (aquellos que alguna vez hayan jugado con una guitarra sabrán que a más tensión, más agudo es el sonido). Para resolver este problema no es necesario hacer cuentas, sino solamente averiguar qué sucede con la tensión de la cuerda L al cortar la cuerda H.

Pista

I nicialmente, la tensión de la cuerda L es $\sigma = G = Mg$ (esta cantidad es, estrictamente, una fuerza y no una tensión). Al cortar la cuerda H las dos masas verticales empujan a todo el sistema (de masa $3M$) a caer con una aceleración $a = \frac{2Mg}{3M}$. En este sistema acelerado, el peso de la masa de abajo es $G = M(g - a) = \frac{1}{3}Mg$, o sea que la tensión en la cuerda L será menor que antes (y constante), lo que implica el mismo comportamiento en la frecuencia de vibración, es menor pero constante.

Respuesta

L a respuesta es 'a)'.

Problema 26, Magnetismo

Un péndulo simple está oscilando. La masa que oscila está imantada. Debajo de la posición de equilibrio se ha colocado una bobina con su eje según la dirección del campo gravitatorio. La tensión que se genera en la bobina a lo largo de un período de oscilación del péndulo consiste en:

a) dos pulsos de tensión del mismo signo.

b) un pulso positivo y uno negativo.

c) cuatro pulsos del mismo signo.

d) dos pulsos positivos y dos negativos intercalados.

e) un pulso positivo, dos negativos y uno positivo.

Pista

L a tensión generada en una bobina es proporcional a la derivada del flujo magnético que la atraviesa. El flujo que atraviesa la bobina tiene derivada nula en los extremos de la oscilación del imán (por tener éste velocidad nula) y en el punto de equilibrio (ya que despreciando la rotación del imán, el flujo que atraviesa la bobina depende de la distancia que los separa, y en ese punto la distancia de separación tiene derivada nula). Esto da lugar a cuatro instantes de tensión nula en la bobina por cada oscilación completa, y por lo tanto a cuatro pulsos de tensión.

Pista

E n los dos intervalos en que el imán se aproxima a la bobina la derivada del flujo tiene signo positivo. En los dos intervalos en que el imán se aleja de la bobina la derivada del flujo tiene signo negativo. Por lo tanto, en una oscilación completa ocurren dos pulsos positivos de tensión intercalados con dos pulsos negativos.

Respuesta

L a respuesta es ’d)’.

Problema 27, Matemáticas

Sean las curvas planas $\gamma_1(t) = (t+1, t^4+1)$ para $t \in [0,1]$ y $\gamma_2(t) = (2-t, 2-t)$ para $t \in [0,1]$. Se define γ como la curva obtenida de recorrer primero γ_1 y, a continuación, γ_2. Para $\alpha \in \mathrm{R}$ constante, el valor de la integral

$$\int_\gamma (\frac{2x}{y}\mathrm{d}x - \frac{x^2+\alpha}{y^2}\mathrm{d}y)$$

es:

a) $2^4\alpha$

b) $-2^4\alpha$

c) 0

d) 1

e) divergente.

Pista

P ara resolver esta integral apliquemos el *teorema de Green*:

$$\int_\gamma (L\ \mathrm{d}x + M\ \mathrm{d}y) = \int_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$$

siendo D la *región simple* encerrada por la curva γ (que se compone de γ_1 y γ_2).

Pista

E n este problema L toma el valor $\frac{2x}{y}$ y M toma el valor $-\frac{x^2+\alpha}{y^2}$. De modo que sus derivadas

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{-2x}{y^2}$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-2x}{y^2}$$

Respuesta

R eemplazando las derivadas de la segunda **Pista** en la igualdad de la primera **Pista**, se obtiene un integrando igual a cero. Por lo tanto, la respuesta correcta es la 'c)'.

Problema 28, Mecánica

Suponga que, por alguna causa interna, la Tierra reduce su radio a la mitad manteniendo su masa constante. Considerando los siguientes enunciados

I) la intensidad de la gravedad en su nueva superficie sigue siendo la misma que antes,

II) se modifica sustancialmente su órbita alrededor del Sol,

III) la nueva duración del día es de 6 horas,

se puede afirmar que:

a) sólo I es correcto.

b) sólo II es correcto.

c) sólo III es correcto.

d) sólo I y III son correctos.

e) ninguno es correcto.

Pista

Para discutir este problema hay que recordar la ley de gravitación: la fuerza de atracción entre dos cuerpos es proporcional al producto de las masas intervinientes e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Este enunciado, por hablar de *distancia*, se refiere a cuerpos puntuales, de otro modo no se podría definir distancia. Cuando un cuerpo tiene una gran extensión, se deben calcular las fuerzas que éste ejerce sobre otra masa integrando los aportes de cada diferencial de masa. Un cuerpo se considera extenso o no en relación a la distancia que lo separa del otro cuerpo cuya interacción se quiere calcular. De esta manera, para calcular la interacción tierra - sol ambos cuerpos pueden considerarse puntuales. No se puede hacer lo mismo al calcular la fuerza de atracción de la tierra sobre un cuerpo en su superficie, en cuyo caso la distribución de masa de la tierra en todo su volumen juega un papel importante.

Pista

Por todo lo anterior, la redistribución de la masa de la tierra en un volumen menor afecta la fuerza de atracción en su superficie pero no su interacción con el sol. Por lo tanto los enunciados *I* y *II* son falsos. Para evaluar la veracidad de *III* hay que recordar la ley de conservación de momento angular: el producto del momento de inercia y velocidad angular es una constante. Como consecuencia de esto, al disminuir el radio de la tierra y por ende su momento de inercia, la velocidad angular aumenta disminuyendo el período de rotación. Para evaluar cuánto disminuye el período hay que conocer el momento de inercia de una esfera: $\frac{2}{5}MR^2$, lo que significa que una reducción del radio a la mitad, implica una reducción del período a $\frac{1}{4}$.

Respuesta

La respuesta es 'c)'.

Problema 29, Hidrostática

Un bloque de madera con forma de cubo de $5cm$ de lado flota en agua sobresaliendo $0,5cm$ por encima de la superficie. La densidad del agua es de $1\frac{g}{cm^3}$. Se agrega aceite de densidad $0{,}6\frac{g}{cm^3}$ sobre la superficie del agua. La mínima altura de aceite por sobre el nivel del agua necesaria para cubrir completamente el bloque de madera es:

a) $0{,}42cm$

b) $0{,}50cm$

c) $0{,}89cm$

d) $1{,}05cm$

e) $1{,}25cm$

Pista

A l agregar aceite sobre el agua, el bloque de madera pierde flotación ya que el aceite es menos denso que la madera. Si sólo hubiera aceite el bloque de madera estaría hundido. En algún instante durante el agregado de aceite, el bloque de madera estará completamente sumergido pero con la cara superior a la altura de la superficie del aceite. La condición de equilibrio es que la presión ejercida por el bloque sobre su cara inferior sea igual a la suma de las presiones de la columna de aceite y de la columna de agua.

Pista

L a ecuación de equilibrio sería $\rho_{madera}h_{cubo} = \rho_{aceite}h_{aceite}+\rho_{agua}h_{agua}$. Dado que la columna de agua corresponde a la parte sumergida del cubo, debe verificarse $h_{cubo} = h_{aceite} + h_{agua}$. Despejando h_{aceite} de estas ecuaciones se encuentra la respuesta.

Respuesta

L a respuesta es ’e)’.

Problema 30, Matemática

Si $\alpha > 0$ es una constante, el valor de

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha x}$$

es

a) 0

b) 1

c) e^{α}

d) $+\infty$

e) $\alpha - 1$

Pista

S i yo estuviera haciendo el examen en este momento, por ser la opción más veloz, utilizaría la calculadora para ver cuánto vale $x^{\alpha x}$ para valores cada vez más pequeños de x. O sea, evaluaría el límite con la calculadora. Esto sirve para encontrar el resultado y además demuestra entendimiento de la noción de límite. De todos modos hay una manera más formal de hacerlo.

Pista

E l camino formal consiste en expresar x como $e^{ln(x)}$, entonces

$$x^{\alpha x} = \left(e^{ln(x)}\right)^{\alpha x} = e^{\alpha x\ ln(x)}$$

Entonces, por la continuidad de la exponencial (ya que se trata de $x \to 0^+$), el límite se convierte en

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(\alpha x\ ln(x))}$$

El límite del exponente está indeterminado y la indeterminación se salva aplicando la regla de L'hopital.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} x$$

Respuesta

D ado que el exponente tiende a cero, la respuesta es 'b)'.