Examen de Física, 2005

Problema 1, Mecánica

Una puerta homogénea de masa $10\ kg$ tiene $2\ m$ de alto y $1\ m$ de ancho. Las bisagras están a $20\ cm$ y $180\ cm$ del piso. La fuerza que ejerce la puerta sobre las bisagras en el eje horizontal es de:

a) $5{,}1\ kgf$

b) $10{,}2\ kgf$

c) $3{,}125\ kgf$

d) $7{,}5\ kgf$

e) $6{,}25\ kgf$

Respuesta

Visto desde una de las bisagras, el momento 50 cm $\times$ 10 kg generado por el peso es contrarrestado por el momento 160 cm $\times F$ generado por la fuerza en la otra bisagra. Por lo tanto, $F = 50 \times 10/160$kg $= 3{,}125$kg. La respuesta correcta es la (c).

Problema 2, Mecánica

Una pulga va saltando por una superficie horizontal de forma tal que la altura máxima que alcanza en cada salto es igual a la distancia horizontal que recorre en el mismo. ¿A qué ángulo con la superficie está saltando la pulga?

a) 90^o

b) 76^o

c) 63^o

d) 45^o

e) 39^o

Respuesta

Si la pulga comienza su salto con una velocidad cuyas componentes son v_y hacia arriba y v_x en la dirección horizontal, en el instante $t = v_y/g$, cuando haya alcanzado su altura máxima $h = v_y^2/2g$, habrá recorrido una distancia horizontal, $\ell = v_x t$. Para que $h = 2\ell$, debe verificarse que $v_y = 4v_x$. De esta manera, el ángulo con la superficie al momento de iniciar el salto debe ser $\theta = \arctan\left(v_y/v_x\right) \approx 76^o$ La respuesta correcta es la (b).

Problema 3, Electricidad y magnetismo

Una partícula cargada, cuya relación carga/masa es de $4{,}8$ x 10^7 C/kg, es acelerada a partir del reposo por una diferencia de potencial V. Al ingresar en una región que contiene un campo magnético uniforme de $1{,}5$ $Tesla$ describe una trayectoria circular de 40 cm de radio. El valor de la diferencia de potencial es:

a) $1{,}7 \times 10^3$ V

b) $8{,}6 \times 10^6$ V

c) $1{,}7 \times 10^7$ V

d) $8{,}6 \times 10^{10}$ V

e) $1{,}7 \times 10^{11}$ V

Respuesta

Después de ser acelerada en el campo electrostático V, la partícula adquirió una energía cinética $mv^2/2 = qV$. Por otra parte, durante su trayectoria circular de radio r en el campo magnético B, tenemos que $mv^2/r = qvB$. De ambas ecuaciones, despejamos:

$$V = \frac{1}{2}\,\frac{q}{m}\,B^2\,r^2 \;.$$

Reemplazando los valores dados en el enunciado, obtenemos que la respuesta correcta es la (b).

Problema 4, Fluidos

En el caño de la figura circula agua, con un caudal de $10\ l/s$ en la dirección de la flecha. La sección del tramo grueso de caño es de $50\ cm^2$, y la del fino de $25\ cm^2$. Se determina que la presión en (1) es de $1100\ hPa$ y en (2) es de $1000\ hPa$. Considerando al agua como un fluido ideal incompresible ¿cuál es la fuerza que debe soportar la brida en el empalme de los caños?

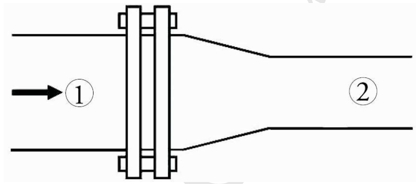
a) $300\ N$

b) $280\ N$

c) $200\ N$

d) $50\ N$

e) $20\ N$



Respuesta

El empalme cónico ejerce una fuerza F_{cono} sobre el agua, que es igual a la que soporta la brida, F_{brida}, de manera tal que,

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_{\text{brida}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(v_2 - v_1) = \rho Q (v_2 - v_1)\ .$$

Por lo tanto,

$$F_{\text{brida}} = p_1 A_1 - p_2 A_2 - \rho Q (v_2 - v_1)\ .$$

Finalmente, reemplazando los valores dados en el enunciado, obtenemos que la respuesta correcta es la (b).

Problema 5, Mecánica

Una bala de cañón de masa m se dispara con energía E hacia un blanco en reposo de masa M con la intención de romperlo.
¿Qué energía máxima puede transferir la bala al material del blanco para romperlo?

a) E

b) E m / M

c) E M / m

d) E M / (M+m)

e) E m / (M+m)

Pista

¡Cuidado con la interpretación de este enunciado! Puesto que no actúan fuerzas externas, el centro de masa debe mantener su movimiento rectilíneo y uniforme de velocidad v_{cm}. La energía $E = (m + M)v_{cm}^2/2$ correspondiente no está disponible para "romper" el blanco.

Respuesta

El centro de masa se mueve con una velocidad

$$v_{cm} = \frac{m}{M+m}\, v \ ,$$

donde $v = \sqrt{2E/m}$ es la velocidad inicial de la bala de cañón. Por lo tanto, la energía "efectivamente" disponible para "romper" el blanco es

$$\Delta E = E - \frac{1}{2}(m+M)v_{cm}^2 = E - \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{M+m}\, v\right)^2 = E - \frac{m}{m+M}\, E = \frac{M}{m+M}\, E \ .$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (d).

Problema 6, Óptica

Un rayo de luz incide en el centro del extremo de una barra cilíndrica de vidrio, formando un ángulo θ con la normal. Para que el rayo emerja por el otro extremo de la barra independientemente del ángulo de incidencia y de la longitud de la barra, el índice de refracción del vidrio debe ser:

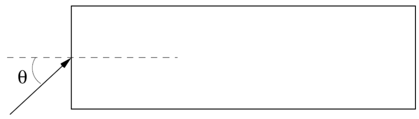
a) cualquiera.

b) menor que 1.207.

c) mayor que 1.414.

d) es imposible que la luz salga por el otro extremo.

e) depende del diámetro de la barra.



Pistas

- Para estudiar las refracciones en el vidrio, la longitud de la barra es un dato que no interesa. Sólo interesan los ángulos de entrada θ y el ángulo de incidencia en la pared. Ninguno de ellos cambia con el largo de la barra.
- El ángulo crítico es el ángulo de incidencia a partir del cuál toda la luz se refleja. Esto sólo puede suceder cuando vamos de un medio más denso a otro menos denso (en rigor es cuando en la interfase bajamos el índice de refracción). Eso quiere decir que en la entrada no existe ángulo crítico y siempre va a pasar un poco de luz.
- Donde sí importa el ángulo crítico es cuando la luz incide sobre la pared lateral. Ahí podemos tener una reflexión total, sin pérdida de energía, que es lo que se usa para hacer una fibra óptica.
- El problema no dice que el ángulo de incidencia no influye. Lo que pide es un resultado en el que la luz viaje hasta el otro extremo, independiente del ángulo de incidencia.

Más pistas

De esta manera, el esquema general de la solución sería:

- La luz incide con un ángulo θ,
- se refracta al entrar al vidrio, y el rayo refractado incide sobre la pared lateral del tubo.
- Escribimos la condición para que haya reflexión total interna en la pared lateral, y
- buscamos cuándo se satisface esa condición, para todos los valores posibles de θ.

Respuesta

- El ángulo θ' dentro del vidrio se relaciona con el ángulo θ de afuera, mediante la ley de Snell: $\text{sen}\theta = n\,\text{sen}\theta'$.
- El ángulo con que la luz incide en la pared lateral es $\pi/2 - \theta'$.
- La reflexión debe ser total, lo cual da la condición $n \cos\theta' \geq 1$.
- Si se eleva esta condición al cuadrado y se reemplaza apropiadamente, se llega a $n^2 \geq 1 + sen^2\theta$.
- Finalmente, como se busca una condición que valga para todo valor de θ, resulta $n \geq \sqrt{2} = 1{,}414$, que es la respuesta (c).

Problema 7, Electricidad y magnetismo

Una varilla conductora de longitud L y masa m por la que circula una corriente I, cuelga de 2 resortes idénticos como se indica en la figura. Todo el sistema se encuentra en presencia de un campo magnético uniforme $\overrightarrow{B} = -B\widehat{z}$. Los versores $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ y $\widehat{z}$ forman una terna derecha. ¿Qué dirección y magnitud debe tener la corriente I para que los resortes estén en su longitud natural?

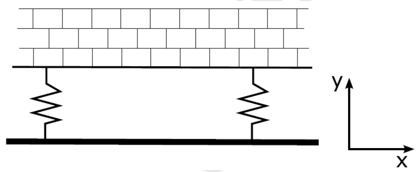
a) I=$\frac{mg}{LB}$ en la dirección $\widehat{x}$.

b) I=$\frac{mg}{LB}$ en la dirección $-\widehat{x}$.

c) I=$\frac{mg}{2LB}$ en la dirección $\widehat{x}$.

d) I=$\frac{mg}{2LB}$ en la dirección $-\widehat{x}$.

e) Los resortes siempre estarán deformados.



Respuesta

Para que los resortes estén en su longitud natural, no deben experimentar ninguna fuerza neta. Por lo tanto, la fuerza ejercida por el campo magnético actuando sobre la corriente debe contrarrestar el peso de la varilla conductora. O sea que $L\overrightarrow{I} \times \overrightarrow{B} = -m\overrightarrow{g}$. Como $\overrightarrow{g}$ apunta en la dirección $-\widehat{y}$ y $\overrightarrow{B} = -B\widehat{z}$, la corriente $\overrightarrow{I}$ debe circular en la dirección $\widehat{x}$. La respuesta correcta es la (a).

Problema 8, Mecánica

Una esfera de radio $R = 2\ cm$, carga $Q = 2\ \mu C$ y masa $m = 116\ g$ se mueve sin rozamiento dentro de un tubo vertical del mismo diámetro. En el fondo del tubo se encuentra una carga $q = 0{,}634\ \mu C$ del mismo signo que Q. Se ha medido la posición de equilibrio, encontrándose la misma a una altura $z_o = 10\ cm$ de q. Entonces, cualquier perturbación hará que la esfera oscile alrededor de ese punto de equilibrio con un período de:

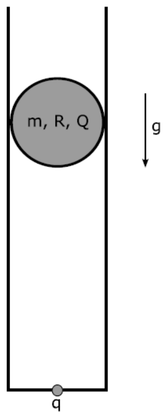
a) $T = 0{,}101\ s$

b) $T = 0{,}071\ s$

c) $T = 0{,}634\ s$

d) $T = 0{,}449\ s$

e) $T = 2{,}228\ s$



Respuesta

La esfera se encuentra en equilibrio en un potencial

$$V(z) = mgz + \frac{qQ}{z}\ ,$$

que es suma del gravitatorio y el electrostático (generado por la carga q). Encontramos el punto de equilibrio z_o como solución de

$$\left.\frac{dV}{dz}\right|_{z_o} = 0\ ,$$

obteniendo $z_o = \sqrt{qQ/mg}$. Desarrollando el potencial alrededor de ese punto, obtenemos,

$$V(z) \approx V_o + \frac{1}{2}\,k(z - z_o)^2\ ,$$

donde $k = 2qQ/z_o^3 = 2mg/z_o$. De esta manera, el período de la oscilación es $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{z_o/2g}$. Reemplazando por los valores indicados en el enunciado del problema, obtenemos que la respuesta correcta es la (d).

Problema 9, Mecánica

Considere un protón (p^+) fijo al sistema del laboratorio. Desde el infinito incide un electrón (e^-) con velocidad inicial v_0, cuyo movimiento lejos del p^+ es aproximadamente rectilíneo uniforme. Al acercarse al p^+ la trayectoria del e^- se curva debido a la interacción electrostática entre ambos $V = -e^2/r$ (ver figura). ¿Qué magnitudes se conservan?

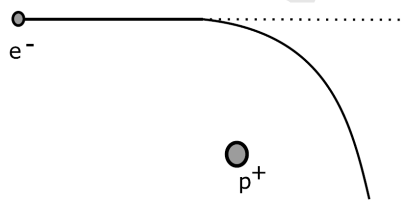
a) sólo $\vec{P}$ (impulso lineal total)

b) sólo $\vec{L}$ (impulso angular total)

c) sólo E (energía total)

d) E y $\vec{L}$

e) $\vec{P}$ y E



Respuesta

El enunciado dice que el protón está "fijo" al sistema de laboratorio. Es decir que actúa como un centro de fuerza fijo. Por lo tanto, no se conservará el impulso lineal del electrón, aunque sí su energía y su impulso angular. La respuesta correcta es la (d).

Problema 10, Óptica

Supóngase que llega luz monocromática λ a una red de difracción de separación d formando un ángulo ψ respecto a su normal, como se muestra en la figura. Si θ es el ángulo de salida, la condición para que ocurra un máximo m de difracción es:

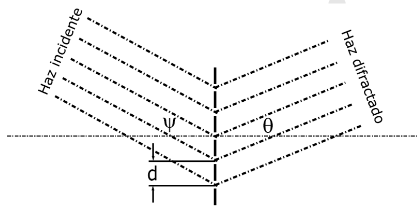
a) $d\ sen\,(\psi + \theta) = m\lambda$

b) $d\ \cos\,(\psi + \theta) = m\lambda$

c) $d\ sen\,(\theta) = m\lambda$

d) $d\ [sen\,(\psi) + sen\,(\theta)] = m\lambda$

e) ninguna de las anteriores.



Respuesta

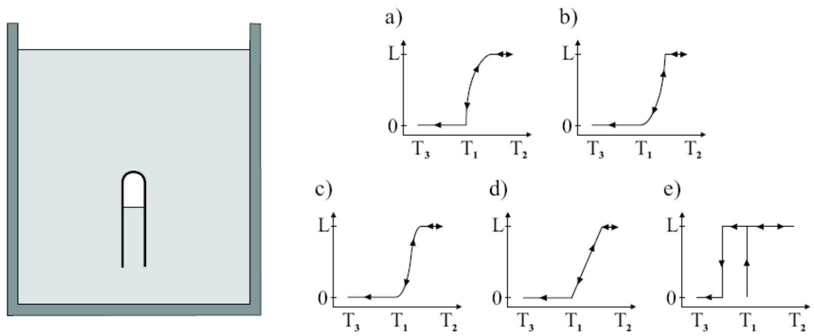
Hay que calcular la "diferencia de camino óptico.entre trayectorias adyacentes para alcanzar el mismo frente de onda. En este sentido, se trata de un problema geométrico. Cada trayectoria es mayor en una distancia $d.[(\mathrm{sen}(\psi) + \mathrm{sen}(\theta)]$ que la inmediatamente superior. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (d).

Problema 11, Mecánica

En un jarro lleno de agua a temperatura T_1, se introduce una probeta invertida con una pequeña cantidad de aire, tal como muestra la figura abajo a la izquierda. Esta probeta está contrapesada de tal manera que siempre se orienta de la forma esquematizada y no puede perder el aire. Inicialmente, está en el fondo con flotación neutra.

A continuación, la temperatura del agua se eleva lentamente hasta T_2, y después se enfría, también lentamente, hasta $T_3 < T_1$. Durante este proceso se observa que la probeta se eleva hasta flotar en la superficie y después se hunde hasta reposar en el fondo.

Si 0 y L marcan las posiciones de la probeta en el fondo y la superficie, respectivamente, ¿cuál gráfico representa mejor la posición de la probeta en función de la temperatura?



Respuesta

- Inicialmente la probeta está en el fondo con flotación exactamente neutra a temperatura T_1.
- Al empezar subir la temperatura por encima de T_1, el aire dentro de la probeta se dilata y la probeta desplaza más volumen de agua que su propio peso y empieza a subir (Llamemos a esta situación, como de flotabilidad positiva).
- A medida que la probeta sube, la presión del agua disminuye, por lo que el aire se expande cada vez más y la flotabilidad es cada vez mayor. En resumen el ascenso es un fenómeno rápido. Una vez que la probeta empezó a subir, se acelera cada vez mas. Posiblemente llegue a una velocidad límite, pero no se detiene hasta llegar a la superficie, incluso aun cuando se detenga el calentamiento del sistema.
- Una vez que la probeta ha alcanzado la superficie, se empieza a bajar la temperatura, pero ahora el aire en la probeta esta a presión atmosférica, menor que la presión en el fondo del recipiente, por lo que desplaza mas agua que en el fondo, cuando se llega a T_1. En consecuencia hay que bajar a una temperatura T_3
- Una vez alcanzada T_3, al bajar la temperatura un poquito se inicia otro proceso repentino donde la probeta adquiere flotabilidad negativa y a medida que se sumerge el aire se comprime, desplaza menos agua, y la flotabilidad es cada vez mas negativa.

Por supuesto que en este razonamiento no se ha tenido en cuenta la dilatación térmica o el cambio de densidad del agua o de la probeta misma con la presión. Sin embargo, como solo es necesario considerar que el coeficiente de dilatación térmico volumétrico o la compresibilidad del agua o del material de la probeta son menores que los del aire, parece ser una suposición bastante razonable. Cualquier gas en condiciones normales tiene un coeficiente de dilatación térmica o una compresibilidad mucho mayor que el agua o los materiales solidos que se usan para fabricar probetas.

Por lo dicho anteriormente, la respuesta correcta es la (e). Digamos además que la respuesta e) tiene dos particularidades que la distinguen del resto: en primer lugar el cambio de posición es repentino, y en segundo lugar la altura de la probeta no es una función de la temperatura, sino que depende de la historia previa (se dice que es un fenómeno con histéresis).

Problema 12, Calor

Una bolita de $95\ g$ y cuyo calor específico es de $C = 0{,}1\ cal/g\ {}^oC$ ($0{,}4184\ J/g\ {}^oC$) cae desde una altura de $5\ m$ sobre un plano horizontal más o menos elástico. La bolita rebota y se eleva a una altura de $50\ cm$. El plano no se calienta ni adquiere una deformación permanente. El incremento de temperatura de la bolita es:

a) $0{,}02\ {}^oC$

b) $0{,}06\ {}^oC$

c) $0{,}1\ {}^oC$

d) $0{,}3\ {}^oC$

e) $0{,}4\ {}^oC$

Respuesta

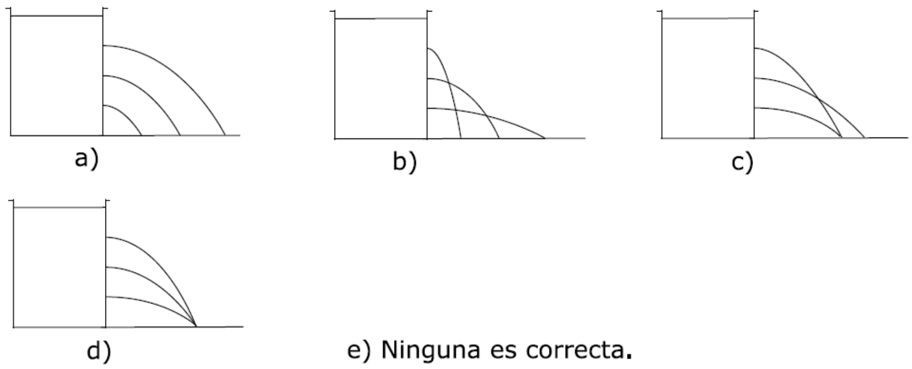
La pérdida de energía potencial, $\Delta E = mg\Delta h$, se invierte en un aumento de la temperatura de la bolita, de manera tal que $\Delta E = mC\Delta T$. Por lo tanto,

$$\Delta T = \frac{g\Delta h}{C}\ .$$

Vemos que el resultado es independiente de la masa m. Reemplazando los valores dados en el enunciado, obtenemos que la respuesta correcta es la (c).

Problema 13, Fluidos

Un tacho lleno de agua tiene tres agujeros equiespaciados verticalmente respecto del fondo y del nivel del líquido, que supondremos constante. De las situaciones que se muestran en la figura, la correcta es:



Respuesta

La respuesta correcta es la (c).
Llamamos h a la separación entre agujeros, entre el primer agujero y el nivel superior, y entre el último agujero y el fondo (agujeros equiespaciados). Llamamos z a la altura de un agujero cualquiera.
$\rho g(4h - z) = \rho v^2/2 \Rightarrow v = \sqrt{2g(4h - z)}$
$x(t) = \sqrt{2g(4h - z)}t$
$y(t) = z - gt^2/2$
Entonces, en $y(t) = 0$, será $gt^2/2 = z$
Como $t^2 = x^2/(2g(4h - z))$ resulta $x = 2\sqrt{z(4h - z)}$
Calculamos para los tres agujeros, resultando:
$x_1 = 2h\sqrt{3}$
$x_2 = 4h$
$x_3 = 2h\sqrt{3}$

Problema 14, Fluidos

Tenemos un vaso lleno hasta el borde de agua a $0\ ^oC$, con un cubito de hielo flotando en ella. Cuando el cubito de hielo se derrita por completo:

a) se derramará un poco de agua del vaso.

b) disminuirá el volumen de agua en el vaso.

c) el volumen de agua del vaso no cambiará.

d) habrá una disminución en la temperatura del agua.

e) ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

Respuesta

La pérdida de energía potencial, $\Delta E = mg\Delta h$, se invierte en un aumento de la temperatura de la bolita, de manera tal que $\Delta E = mC\Delta T$. Por lo tanto,

$$\Delta T = \frac{g\Delta h}{C} \ .$$

Vemos que el resultado es independiente de la masa m. Reemplazando los valores dados en el enunciado, obtenemos que la respuesta correcta es la (c).

Problema 15, Ondas

Un automóvil se acerca a nosotros con velocidad constante. Sus ocupantes vienen escuchando una cumbia villera a todo volumen, de la que podemos percibir el retumbe rítmico del bajo. En 10 segundos contamos 22 pulsos del bajo. Cuando el auto se aleja de nosotros, contabilizamos 20. ¿A qué velocidad va el coche?

a) 20 km/h

b) 40 km/h

c) 60 km/h

d) 80 km/h

e) 100 km/h

Respuesta

Se trata de un problema de efecto Doppler. La relación entre la velocidad del coche v_c y la velocidad del sonido $v_s \approx 1260$ km/h está dada por cuenta sale que $v_c = v_c \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ donde $\alpha = \nu_1/\nu_2$, donde ν_1 y ν_2 son las frecuencias del sonido en uno y otro sistema de referencia. El resultado correcto es (c).

Problema 16, Mecánica

Un péndulo de longitud $l = 50\ cm$ y masa $m = 100\ g$ está colgado del techo de un vehículo, que se desplaza horizontalmente con una aceleración $a = 2\ m/s^2$. El período de oscilación de pequeña amplitud en esas condiciones es:

a) $1{,}4192\ s$

b) $1{,}4048\ s$

c) $0{,}2236\ s$

d) $1{,}2934\ s$

e) $0{,}2058\ s$

Respuesta

Debido a la aceleración del vehículo, el punto de equilibrio del péndulo está desplazado respecto de la vertical.

La aceleración efectiva que sentirá el péndulo será la suma de g y a, pero como vectores perpendiculares. El punto de equilibrio estará en la dirección de dicha aceleración.

La aceleración resultante tendrá módulo $\sqrt{(}g^2 + a^2)$. Con ese valor en la expresión tradicional del período de oscilación de un péndulo, se llega a que la respuesta correcta es la (b).

Problema 17, Electricidad y magnetismo

Dos esferas conductoras, una con un radio de $6{,}0\ cm$ y la otra con un radio de $12{,}0\ cm$, se encuentran cargadas cada una con $3\,10^{-8}\ C$ y separadas una gran distancia. Si se conectan las esferas por medio de un alambre conductor, la carga final en la esfera de radio menor es, comparada a la carga en la esfera de radio mayor:

a) 4 veces más grande.

b) 2 veces más grande.

c) Igual.

d) 2 veces más chica.

e) 4 veces más chica.

Respuesta

La condición de igual potencial impone que $q_1/q_2 = R_1/R_2 = 0{,}5$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (d).

Problema 18, Ondas

Considere un haz de luz incidiendo en una interfaz entre dos materiales de distinto índice de refracción. En esta interfaz se originan otros dos haces de luz, uno reflejado y uno refractado. De las siguientes afirmaciones,

I) los tres haces tienen la misma longitud de onda

II) los tres haces tienen la misma frecuencia

III) los tres haces tienen la misma intensidad

IV) el haz incidente y el reflejado tienen la misma longitud de onda, el haz refractado tiene una longitud de onda diferente

a) sólo I es correcta

b) sólo II es correcta

c) sólo III es correcta

d) sólo I y II son correctas

e) sólo II y IV son correctas

Respuesta

La luz no cambia su frecuencia f al cambiar de medio, pero si su velocidad v, y por lo tanto, también cambia su longitud de onda $\lambda = v/f$. Por lo tanto, las afirmaciones II y IV son correctas y las otras dos incorrectas. La respuesta al problema es (e).

Problema 19, Calor

En un termo bien aislado, se mezclan 200 g de hielo a -5 ^oC con 500 g de agua a 50 ^oC. Cuando se llega al equilibrio la temperatura es de aproximadamente:

a) 55 ^{o}C

b) 49 ^{o}C

c) 25 ^{o}C

d) 17 ^{o}C

e) 12 ^{o}C

Nota: calor específico del agua 1 cal/g^oC,
calor específico del hielo 0,5 cal/g^oC,
calor latente de fusión 80 cal/g.

Respuesta

Veamos que nos dice cada una de las respuestas propuestas:

a) Este valor es la diferencia de temperatura entre el agua y el hielo: $T_a - T_h$

b) Esta opción no considera que el hielo se derrite.

c) Este valor es igual a la mitad de la temperatura del agua: $T_a/2$.

d) Esta respuesta no considera que el agua a 0^oC se tiene que calentar.

e) Esta es la respuesta correcta. La temperatura final T se obtiene de considerar que $0 = \Delta Q = c_a m_a(T - T_a) + c_h m_h(0^oC - T_h) + c_f m_h + c_a m_h(T - 0^oC)$.

Problema 20, Electricidad y magnetismo

Cuando el interruptor S se conecta a la izquierda en la figura, las placas del condensador de capacitancia C_1 adquieren una diferencia de potencial V_0. Inicialmente C_2 y C_3 están descargados. Ahora el interruptor se conecta a la derecha. ¿Cuál es la carga final q_2 del condensador de capacitancia C_2?

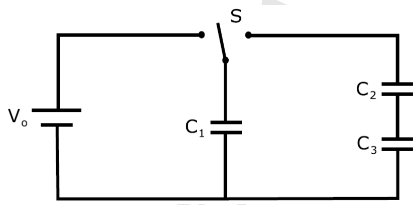
a) $q_2 = \frac{V_0}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}}$

b) $q_2 = \frac{V_0}{\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}}$

c) $q_2 = 0$

d) $q_2 = (C_2 + C_3)\, V_0$

e) $q_2 = (C_1 + C_2 + C_3)\, V_0$



Respuesta

El condensador C_1 se carga inicialmente con $q^I = C_1 V_0$

La capacitancia serie en la rama de la derecha produce una capacitancia efectiva C_E dada por $1/C_E = 1/C_2 + 1/C_3$

Al conectar a la derecha, se igualan los potenciales y se conserva la carga. Notar que en la rama de la derecha los condensadores tienen la misma carga ya que se debe conservar neutra la rama entre C_2 y C_3. Entonces $V = q_1/C_1 = q_E/C_E \quad \Rightarrow \quad q_1 - q_E C_1/C_E = 0$ y $q_1 + q_E = C_1 V_0$, de donde se obtiene que $q_E = V_0/(1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3)$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

Problema 21, Mecánica

Un bloque de masa $M = 2\ kg$ está apoyado sobre una mesa, con la que tiene un coeficiente de rozamiento estático μ_e. Este bloque está atado a otro de masa $m = 1\ kg$ por medio de una cuerda de masa despreciable y longitud L. Ésta inicialmente se encuentra a la misma altura que M, y a una distancia d del soporte, como se indica en la figura. El soporte no tiene rozamiento con la cuerda. Estando la cuerda extendida y sin tensión se libera la masa m. La masa M empieza a deslizarse sobre la mesa cuando el ángulo formado por la cuerda con la horizontal es exactamente $\theta = 30^o$. Entonces, el coeficiente de rozamiento estático es:

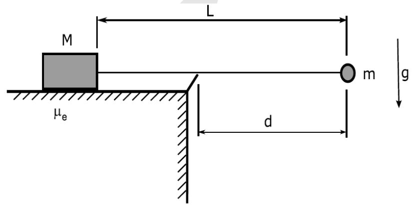
a) $\mu_e = 0{,}250$

b) $\mu_e = 0{,}750$

c) $\mu_e = 1{,}116$

d) $\mu_e = -0{,}250$

e) ninguna de las respuestas anteriores



Respuesta

En el momento que empieza a moverse el bloque la tensión en el hilo debe ser $T = \mu_e Mg$. Por otro lado, del diagrama de fuerzas sobre la masa chica, tenemos que $T = mg\text{sen}\theta + F_{mboxcentrifuga} = mg/2 + mv^2/d$. Por conservación de la energía resulta que $mgd\text{sen}\theta = mv^2/2$ y, por lo tanto, $v = \sqrt{gd}$. Reemplazando en la expresión para la tensión obtenemos $T = mg/2 + mgd/d = 3/2mg$. Entonces, $T = \mu_e Mg = 3/2mg$. Por lo tanto, $\mu_e = 3m/2M = 3/4$, y la respuesta correcta es la (b).

¿Cuál es el error en las otras opciones?

a) $\mu_e = m\sin\theta/M$, no considera la fuerza centrífuga.

b) $\mu_e = m(\sin\theta + 2\cos\theta)/M$, tiene mal la energía potencial, $V = mgd\cos\theta$.

c) $\mu_e = -0{,}750$, es el valor correcto, pero el signo está cambiado.

Problema 22, Electricidad y magnetismo

Los rieles de una vía están separados $1{,}50\ m$ y están aislados entre sí. Se conecta entre ellos un voltímetro. ¿Cuánto lee el instrumento cuando pasa un tren a $200\ km/h$? (la componente vertical del campo magnético de la Tierra mide allí $1{,}5$x10^{-5} Tesla).

a) $1{,}25\ mV$

b) $1{,}50\ mV$

c) $2{,}50\ mV$

d) $3{,}00\ mV$

e) $4{,}50\ mV$

Respuesta

Este es uno de esos problemas de selección múltiple que se pueden resolver rápidamente en base a un análisis dimensional. Relacionamos el campo eléctrico E con el magnético B y la velocidad v del tren de la siguiente manera, $E = v \cdot B$. Y ahora, conociendo la separación d entre rieles, obtenemos el potencial V como $V = E \cdot d$. Resulta finalmente, $V = v \cdot B \cdot d$, y reemplazando los valores dados en el enunciado, obtenemos que la respuesta correcta es la (a).

Problema 23, Óptica

Una moneda se encuentra en el fondo de un vaso lleno de agua hasta una altura de $5\,cm$ ($n = 1{,}33$). Un observador la mira desde arriba desde un ángulo de 45^o. ¿A qué profundidad la ve?

a) $2{,}7\,cm$

b) $3{,}1\,cm$

c) $4{,}1\,cm$

d) $4{,}5\,cm$

e) $5{,}5\,cm$

Respuesta

Supondremos que la imagen de la moneda se mantiene sobre el eje vertical. En otras palabras, ubicaremos la imagen sobre el cruce de las líneas de visión de un observador que mira la moneda verticalmente, y otro que la ve desde $\theta = 45^o$. Si llamamos h a la profundidad que se encuentra la moneda ($h = 5$ cm), y d a la profundidad que la ve el observador ubicado a 45^o, tenemos que $d\,\mathrm{tg}\,\theta = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$, donde, debido a la ley de Snell, $\mathrm{sen}\theta = n\ \mathrm{sen}\alpha$. A partir de estas dos ecuaciones, obtenemos que

$$d = h \times \frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2 - \mathrm{sen}^2\theta}}$$

Reemplazando los valores dados en el enunciado, obtenemos que la respuesta correcta es la (b).

Problema 24, Mecánica

Considere un alambre plano descripto por la ecuación $y = f(x)$. Suponga que sobre él puede deslizar una masa m sin rozamiento. ¿Qué forma debe tener el alambre para que al hacerlo girar alrededor del eje vertical (eje y) con velocidad angular constante ω la masa que desliza sobre él se encuentre en equilibrio en cualquier punto?

a) $y(x) = \frac{\omega}{2g}x^2 + c$

b) $y(x) = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$

c) $y(x) = \frac{\omega^2}{g}x + c$

d) $y(x) = -\frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$

e) $y(x) = \frac{\omega}{g}x + c$

Respuesta

Para que la masa se encuentre en equilibrio, la componente de la fuerza de gravedad $\vec{F}_{grav} = -mg\hat{y}$ a lo largo del alambre debe contrarrestar componente correspondiente de la fuerza centrífuga $\vec{F}_{centr} = m\omega^2\vec{x}$. O sea que la curva debe cumplir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_{centr}}{F_{grav}} = \frac{m\omega^2 x}{mg} \, .$$

La solución de esta ecuación diferencial es la parábola: $y(x) = (\omega^2/2g)x^2 + c$, donde c es una constante arbitraria. La respuesta correcta es la (b).

Problema 25, Orden de magnitud

Aproximadamente cuántos paquetes de $1\ kg$ de yerba cada uno caben en una caja cúbica de $100\ m$ de lado?

a) 3 x 10^6

b) 3 x 10^8

c) 3 x 10^{10}

d) 3 x 10^{12}

e) 3 x 10^{14}

Respuesta

Un kilogramo de yerba ocupa un volumen mayor que un kilogramo de agua, o sea que $V_1 > 10^{-3}m^3$. De esta manera, N paquetes de yerba ocuparán un volumen, igual a $V_N = NV_1 > N10^{-3}m^3$. Por lo tanto, en un volumen de $10^6 m^3$ podré acomodar $N < 10^6 m^3/10^{-3}m^3 = 10^9$ paquetes. Esto nos deja con las opciones (a) y (b) como respuestas posibles. Pero la opción (a) daría un volumen inmenso $V_1 = 1/3m^3$ para cada paquete. La respuesta correcta es la (b).

Examen de Matemática, 2005

Problema 1, Cálculo diferencial e integral

Un cuerpo semiesférico que ocupa el volumen $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ con $z \ge 0$, está formado por un material cuya densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia desde el punto al origen $(0, 0, 0)$. El centro de gravedad se ubica en:

a) $(0, 0, \frac{2}{5}a)$

b) $(0, 0, \frac{3}{8}a)$

c) $(0, 0, \frac{3}{16}a)$

d) $(0, 0, \frac{3}{15}a)$

e) $(\frac{1}{5}a, \frac{1}{5}a, \frac{1}{5}a)$

Pista

Por razones de simetría, el centro de gravedad debe estar ubicado sobre el eje z. Por lo tanto, podemos descartar la opción e.

Respuesta

- La densidad δ es, en coordenadas esféricas, proporcional a r/a. Escribimos, por ejemplo, $\delta(r) = \alpha r/a$.
- Calculamos el peso P de la semiesfera como la mitad del de una esfera completa

$$P = \frac{1}{2} \times 4\pi \int_0^a \delta(r) r^2 \,\mathrm{d}\, r = \frac{1}{2} \times \frac{4\pi\alpha}{a} \int_0^a r^3 \,\mathrm{d}\, r = \frac{1}{2} \times \frac{4\pi\alpha}{a} \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2}\alpha\pi a^3$$

- De esta manera, la densidad es igual a $\delta(r) = 2Pr/\pi a^4$.
- Calculamos la posición del centro de gravedad,

$$z_g = \frac{1}{P} \int z\, \delta(r)\, r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \frac{1}{P} \int (r\cos\theta)\; \delta(r)\, r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

  donde la integral se extiende sobre todo el volumen de la semiesfera.
- Procedemos a realizar la integral

$$\begin{aligned} z_g &= \frac{1}{P}\, 2\pi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^a \mathrm{d}r\, r^3 \sin\theta\cos\theta\, \frac{2Pr}{\pi a^4} \\ &= \frac{4}{a^4} \left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sin\theta\cos\theta \right) \left(\int_0^a \mathrm{d}r\, r^4 \right) \\ &= \frac{4}{a^4} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{a^5}{5}\right) = \frac{2}{5}\, a \end{aligned}$$

- La respuesta correcta es la “a”

Problema 2, Cálculo diferencial e integral

El valor del límite

$$\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos(x))^{3\sec(x)}$$

es:

a) 1

b) ∞

c) $\frac{1}{3}$

d) e^3

e) 0

Respuesta

El ”truco”para resolver este problema es escribir el límite como

$$\lim_{\nu \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\nu} \right)^{\nu} \right]^3 ,$$

donde se ha definido $\nu = \sec(x) = \cos(x)$, y recordar la definición del número e en términos del interés compuesto continuo

$$e = \lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\nu} \right)^{\nu} .$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la “d”.

Problema 3, Álgebra

¿Cuál de los siguientes pares de vectores son una base de R^2 formada por autovectores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$

Pista

Se pueden descartar las opciones "c" y "e", ya que los dos vectores no son independientes entre sí.

Respuesta

- Habiendo resuelto la ecuación $\det(A - \lambda Id) = 0$ para obtener los dos autovalores $\lambda_\pm = \pm\sqrt{2}$, una de las formas más rápidas de resolver el problema es por "prueba y error" sobre las opciones "a", "b" y "d".
- Así se puede mostrar que la respuesta correcta es la "a".

Problema 4, Cálculo diferencial e integral

Si A es una constante real y positiva, la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3Axy$ tiene un único mínimo local en el punto P. Entonces

a) $f(P) = -3A^3$

b) $f(P) = -2A^3$

c) $f(P) = -A^3$

d) $f(P) = -1$

e) $f(P) = 0$

Respuesta

Calculamos el gradiente de la función $\nabla f = \left(3x^2 - 3Ay\right)\hat{x} + \left(3y^2 - 3Ax\right)\hat{y}$, y resolvemos la condición de extremo $\nabla f = 0$ para obtener $x_P = y_P = A$. Por lo tanto, $f(x_P, y_P) = -A^3$ y la respuesta correcta es la "c".

Problema 5, Álgebra

El rango (cantidad máxima de columnas linealmente independientes) de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

es:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) No se lo puede calcular con la información provista

Pista

Como el determinante de la matriz es 0, las tres columnas son dependientes. Por lo tanto, el rango es menor o igual que 2.

Pista

Tomemos dos columnas cualesquiera. Es claro que no son múltiplos entre si. Por tanto son linealmente independientes. Luego el rango es 2. La respuesta correcta es la "c".

Respuesta

Si alguna de las columnas que conforman la matriz A no fuese linealmente independiente de las otras, entonces el polinomio característico $\det(A - xI) = 0$, donde I es la matriz identidad, debería tener al menos una raíz nula. Para que ello ocurra, basta con verificar si el término independiente de x (igual al determinante de la matriz) es nulo o no. Ello es efectivamente así, y por lo tanto el rango de A es menor o igual que 2. Queda por ver si el polinomio característico tiene otra raíz nula. Calculamos el coeficiente del término lineal en x y encontramos que es igual a 6. Por lo tanto, la raíz nula es simple y el rango de A no puede ser menor que 2. La respuesta correcta es la "c".

Problema 6, Números complejos

El número complejo $\frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(15^o) - i\ \sin(15^o)]$ es otra forma de escribir:

a) $\frac{1-i}{\sqrt{2}-i}$

b) $\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

c) $\frac{1+i}{\sqrt{2}-i}$

d) $\frac{1+i}{\sqrt{2}+i}$

e) $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

Respuesta

- El módulo del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los módulos. Por lo tanto, el módulo del número complejo dado en el problema es $1/\sqrt{(}2)$.
- Los números indicados en las opciones "a", "c" y "d" tienen módulos distintos. Así que no pueden ser las respuestas correctas.
- La fase del número complejo dado en el problema es igual (en grados) a $\phi = 15^o$. La fase del numerador de "b" y "e" es -45^o. Para obtener la fase del cociente tendría que restarle la fase del denominador. Pero, la fase del denominador de "e" es positiva. Por lo tanto no puede ser la solución correcta.
- Nos queda la única opción posible, que es la "b".

Problema 7, Probabilidad y estadística

Se tira 8 veces un dado no cargado. ¿Cuál es, aproximadamente, la probabilidad de que el número 5 aparezca como máximo 3 veces a lo largo de estas tiradas?

a) $0{,}97$

b) $0{,}57$

c) $0{,}13$

d) $0{,}03$

e) $0{,}005$

Pista

- Se quiere calcular la probabilidad del evento A (que salga el 5 como máximo tres veces en las 8 tiradas).
- Consideramos los eventos A_0 (que no salga el 5 ninguna vez), A_1 (que salga el 5 exactamente una vez), A_2 (que salga el 5 exactamente 2 veces) y A_3 (que salga el 5 exactamente 3 veces.
- Estos eventos son disjuntos y además $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- Empezamos por calcular la probabilidad de A_0, A_1, A_2 y A_3, considerando los casos favorables sobre los casos posibles.
- Después usando uno de los axiomas de la probabilidad calculamos la probabilidad de A.

Respuesta

Hay otra manera de resolver el mismo problema: Definimos la variable aleatoria x que define el número de éxitos (veces que sale un dado número, el 5 en este caso) en una secuencia de $n = 8$ intentos independientes de probabilidad $p = 1/6$. Esta variable aleatoria tiene una distribución binomial de parámetros, dada por

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x \, (1-p)^{n-x} \,,$$

donde el combinatorio

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

define el número de formas de separar x elementos de un total de n.

Finalmente, la probabilidad de que un número determinado (el 5 en este caso) salga $m = 3$ veces en la secuencia de $n = 8$ intentos es

$$P = \sum_{x=0}^{m} \binom{n}{x} p^x \, (1-p)^{n-x} \,,$$

que (para el caso particular bajo análisis, con $n = 8$, $m = 3$ y $p = 1/6$) resulta $P = 0{,}96935$. Por lo tanto, "a" es la respuesta correcta.

Problema 8, Cálculo diferencial e integral

Se define

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| > x^2 \text{ ó } y = 0 \\ 0 & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

Se consideran los siguientes enunciados:

I. f es continua en $(0,0)$.

II. Todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$ existen.

III. f es diferenciable en $(0,0)$.

¿Cuál de las siguientes posibilidades es correcta?:

a) Los enunciados I, II y III son correctos.

b) Los enunciados I y II son correctos pero III es falso.

c) Los enunciados I y III son correctos pero II es falso.

d) Los enunciados I y III son falsos pero II es correcto.

e) Los enunciados I, II y III son falsos.

Respuesta

La derivada direccional en el punto $(0,0)$ existe si existe el siguiente límite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\epsilon \cos\theta, \epsilon \sin\theta) - f(0,0)}{\epsilon},$$

donde θ define la dirección de la recta a lo largo de la cual me acerco al origen $(0,0)$.

Un gráfico sencillo nos permitirá confirmar que cerca de $(0,0)$ cualquier de dichas rectas está totalmente contenida en la región donde la función es igual a 1. Por lo tanto $f(\epsilon \cos\theta, \epsilon \sin\theta) = 1$ para todo valor de θ y para ϵ suficientemente pequeño. Entonces, la derivada direccional existe en el punto $(0,0)$ y es igual a 0. El enunciado II es correcto.

Finamente, como el enunciado I es claramente falso, la única opción posible es la dada por la respuesta "d".

Problema 9, Números complejos

Si $i = \sqrt{-1}$, el valor de

$$\sum_{n=3}^{1234567} i^n$$

es...

a) 0

b) $-i$

c) 1234564

d) $1234567i$

e) -1234564

Pista

Desde el 3er. al 6to. término obtengo la secuencia $-i + 1 + i - 1$ que es igual a 0. Lo mismo ocurre con la suma desde el 7mo. an 10mo. término. Y así siguiendo...

Pista

De esta manera, si corto la suma

$$\sum_{n=3}^{N} i^n$$

en un valor de N igual a 6, 10, 14, 18, $\cdots$, o en general $N = 2 + 4 \cdot q$, con q cualquier número natural, la suma será nula.

Respuesta

Como $1234566 = 2 + 4 \cdot 308641$, entonces

$$\sum_{n=3}^{N} i^n = \sum_{n=3}^{1234566} i^n + i^{1234567} = 0 + i \cdot i^{1234566} = 0 + i \cdot (-1) = -i \ .$$

La respuesta correcta es la "b".

Problema 10, Álgebra

El siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} m & m & m & m \\ m & c & c & c \\ m & c & b & b \\ m & c & b & a \end{vmatrix}$$

vale:

a) 0

b) $m(c-m)(b-c)(a-b)$

c) $m^4c^3b^2a$

d) $m(c-3m)(b-2c)(a-b)$

e) $m(3c-m)(2b-c)(a-b)$

Respuesta

Si no se quiere intentar un cálculo directo, se podría proceder de la siguiente manera: Suponemos que $m = c = b$. Es fácil ver que el determinante de la matriz resultante es igual a 0. La única opción que satisface esto es la "b". Por lo tanto esta debe ser la respuesta correcta.

Problema 11, Cálculo vectorial

Sea la elipse definida por la intersección de la superficie cilíndrica infinita $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $z = y$. El valor absoluto de la circulación del campo vectorial

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{2}$$

($\hat{x}$ e $\hat{y}$ son los versores en las direcciones respectivas) en esta elipse vale:

a) 0

b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

c) π

d) $\sqrt{2}\pi$

e) 1

Pista

Usar el teorema de Stokes para transformar la integral de línea en una integral de superficie.

Pista

Aplicando el teorema de Stokes, la circulación de $\mathbf{A}$ alrededor de la elipse es igual a

$$\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\,,$$

donde $\mathrm{d}\mathbf{s}$ es perpendicular a una superficie S limitada por la elipse.

Respuesta

El rotor del campo del campo es igual a $\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}}$. Por lo tanto,

$$\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \int_S \mathrm{d}\mathbf{s}\,,$$

que es la proyección de la superficie S sobre el plano (x, y). Independientemente de cual superficie S adoptemos, su proyección sobre el plano (x, y) es igual a un círculo de radio unidad, cuya área es igual a π. En otras palabras, el flujo a través de la elipse es igual al flujo a través del circulo de radio unidad. La respuesta correcta es la “c”.

Problema 12, Geometría analítica

Un crucero está anclado a $9\ km$ del punto más próximo de la costa, marcado en la figura como A. El almacén más cercano se encuentra sobre la costa, a $15\ km$ en línea recta desde A. Para ir a hacer las compras, mandan un cadete que va remando en un bote a una velocidad de $4\ km/h$ y luego caminando a $5\ km/h$. ¿En qué punto de la costa le conviene desembarcar para tardar el menor tiempo posible en llegar al almacén?

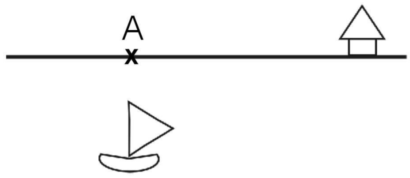
a) a 15 km del almacén

b) a 12 km del almacén

c) a 9 km del almacén

d) a 3 km del almacén

e) a 0 km del almacén



Respuesta

Si desembarca a una distancia x del almacén, el cadete tarda un tiempo

$$t = \frac{x}{5\,\mathrm{km/h}} + \frac{\sqrt{(15\,\mathrm{km} - x)^2 + (9\,\mathrm{km})^2}}{4\,\mathrm{km/h}} \,.$$

Calculo la derivada $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$, e igualo a cero para obtener la solución $x = 3\,\mathrm{km}$. La solución correcta es la "d".

Problema 13, Geometría analítica

Si $E \subset R^2$ es la curva definida por la ecuación $4(x-1)^2+9(y+3)^2=36$, ¿cuál de las siguientes rectas en R^2 es tangente a E y contiene al punto $(1,-3)$?

a) $8x+18y=26$

b) $-8x+18y=10$

c) $6\sqrt{3}x+9y=9+6\sqrt{3}$

d) $8(x-1)+18(y+3)=64$

e) Ninguna de las anteriores

Respuesta

La ecuación $4\,(x-1)^2+9\,(y+3)^2=36$ define una elipse centrada en $(1,-3)$. Todas las rectas indicadas pasan por el centro de esa elipse, y por lo tanto no pueden ser tangentes a ella. La respuesta correcta es la "e".

Problema 14, Cálculo vectorial

El campo vectorial $F : R^3 \to R^3$ es independiente de la coordenada vertical z y sus direcciones son siempre horizontales. La figura muestra esquemáticamente los valores de F en una región de R^3 de altura fija (z constante). Sabiendo que F es C^2 (sus derivadas segundas son continuas), ¿cuál de las siguientes afirmaciones podría aplicarse a F con mayor precisión?

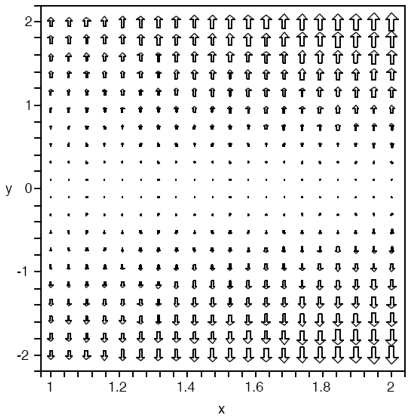
a) F es un campo conservativo.

b) $\mathrm{rot}(F) = 0$ y $\mathrm{div}(F) = 0$.

c) $\mathrm{rot}(F) = 0$ pero $\mathrm{div}(F) \neq 0$.

d) $\mathrm{rot}(F) \neq 0$ pero $\mathrm{div}(F) = 0$.

e) $\mathrm{rot}(F) \neq 0$ y $\mathrm{div}(F) \neq 0$.



Respuesta

La respuesta correcta es la "e", F no es irrotacional ni tiene divergencia nula.

Si F fuera irrotacional, la integral de línea del campo sobre el borde de cualquier rectángulo se debiera anular, pero esto no ocurre ya que si tomamos un rectángulo con el borde inferior sobre el eje x, las integrales de línea sobre los lados horizontales se anulan, mientras que (dado que el campo crece hacia la izquierda) las integrales verticales no se anulan. Por tanto F es no es irrotacional.

Si la divergencia de F se anulase, el flujo de F sobre cualquier rectángulo debiera anularse. Pero para el rectángulo del párrafo anterior, el flujo es la integral de $|F|$ sobre el lado superior del rectángulo, que no se anula. Por tanto, la divergencia de F no se anula.

Problema 15, Cálculo diferencial e integral

La distancia en metros de una partícula puntual al origen de coordenadas t minutos después de haber partido de ese origen está dada por la fórmula:

$$D(t) = \int_0^t \frac{\sin(2u)}{u} du.$$

¿Cuál de los siguientes valores aproxima mejor la distancia en metros de la partícula al origen 10 segundos después de partir?

a) 0

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 2

Pista

El límite superior t de la integral está expresada en minutos. Para calcularla en un lapso de 10 segundos, hay que integrar hasta $t = 1/6$ minutos. Esto permite *aproximar* el integrando

Respuesta

Aproximamos el integrando por

$$\frac{\sin(2u)}{u} \approx 2\,,$$

con lo cual podemos calcular

$$D(1/6) = \int_0^{1/6} \frac{\sin(2u)}{u} \approx 2\,\mathrm{d}t \approx \int_0^{1/6} 2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,.$$

La respuesta correcta es la "c".