Examen de Física, 2003

Problema 1, Electricidad y magnetismo

Dos cargas $+q$ y $-q$ están ubicadas en los vértices inferiores de un triángulo equilátero como se ve en la figura. Una carga de prueba positiva es entonces agregada en el tercer vértice. ¿Cuál de las flechas de la figura muestra la dirección de la fuerza neta sobre la carga de prueba?

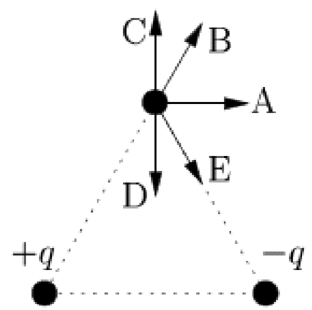
a) A.

b) B.

c) C.

d) D.

e) E.



Respuesta

Sobre la carga de prueba actúan dos fuerzas. La dirección de cada una será según la recta que une la carga de prueba con la carga del vértice del triángulo y con un sentido tal que las cargas iguales se repelen y las opuestas se atraen. Las componentes según el eje y son de igual módulo pero distinto sentido con lo cual se cancelan. Las componentes según x son de igual módulo y signo dando la respuesta correcta que es la (a)

Problema 2, Calor y calorimetría

En un recipiente aislado perfectamente del exterior y a 1 atm de presión se colocan dos masas idénticas de agua, una en forma de hielo exactamente a cero grados centígrados y otra en forma de vapor exactamente a 100 grados centígrados. ¿Qué ocurre al cabo de un tiempo largo? (Calor latente de ebullición $\sim$ 600 cal/g, calor latente de fusión $\sim$ 80 cal/g, calor latente de sublimación $\sim$ 680 cal/g).

a) El hielo sublima llenando el recipiente de vapor de agua.

b) Se obtiene agua en equilibrio con vapor a $T = 50^0C$.

c) Se obtiene agua en equilibrio con vapor a $T > 50^0C$.

d) Se obtiene agua en equilibrio con vapor a $T < 50^0C$.

e) Ninguna de las opciones anteriores.

Respuesta

De entrada vemos que la respuesta (a) no es correcta. Para que la masa m de hielo sublime necesitamos absorber 680m cal, que es más que las 600m cal que puedo extraer de la condensación del vapor.
Para poder derretir la masa m de hielo, éste necesita que le entreguen $80m$ cal. Este calor se extrae del vapor, que entonces condensa una parte de su masa. En este punto tengo una masa m de agua a 0^0C, una masa $0{,}13m$ a 100^0C y una masa $0{,}87m$ de vapor. Para subir la temperatura del agua a 100^0C necesito extraer más calor del vapor, con lo cuál termino con una cantidad xm de agua a 100^0C y una cantidad ym de vapor. Imposible tener entonces sólo vapor de agua y la respuesta (e) no es correcta. La única opción que queda es tener agua y vapor en equilibrio y esto sucede a 100^0C, con lo cual la respuesta correcta es la (c).

Problema 3, Electricidad y magnetismo

Un campo eléctrico $E(r,t)$ depende de las coordenadas espaciales y el tiempo según la expresión:

$$E(r,t) = E_0 \hat{y} \cos(k_1 x) \cos(k_2 z - \omega t)$$

donde $\hat{y}$ es el versor en la dirección y, mientras E_0, k_1, k_2 y ω son constantes reales e independientes. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

a) E induce un campo magnético variable cuya dirección está contenida en el plano xz.

b) E corresponde a una onda plana en el espacio libre, siempre que k_1, k_2 y ω verifiquen una relación particular.

c) E no describe una onda plana circularmente polarizada.

d) La densidad de carga es idénticamente nula.

e) La configuración corresponde a una onda estacionaria.

Respuesta

Acá nos preguntan cuál de las opciones es falsa asi que conviene leer todas primero para que nos resulte evidente cuál es la falsa.
La ecuación de onda que nos dan representa una onda plana si k_1, k_2 y ω representan el número de onda y la frecuencia (y por lo tanto las opciones "b" y "c" son ciertas).
El campo eléctrico se desplaza a lo largo del eje z con dirección $\hat{y}$. Esto indica que es una onda viajera y no una estacionaria y ahí ya vemos que la afirmación "e" es falsa (es la respuesta correcta).
Usando las ecuaciones de Maxwell, sabemos que $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$. Tenemos un campo eléctrico (0,E,0) entonces el rotor va a ser de la forma $(R_x, 0, R_z)$. Vemos así que el campo magnético va tener la misma forma y por lo tanto su dirección va a estar contenida en el plano xz (la opción "a" es cierta).
Para ver que pasa con la densidad de carga, usamos otra vez las ecuaciones de Maxwell. La densidad de carga va a ser proporcional a la divergencia del campo eléctrico. Tenemos un campo (0,E(x,z,t),0) entonces la $\nabla \cdot E = 0$ y por lo tanto la densidad de carga también lo es (la afirmación "d" es cierta).

Problema 4, Orden de magnitud

Aproximadamente, ¿cuántos metros cúbicos de agua hay en todos los mares de la Tierra?

a) 10^{12}

b) 10^{17}

c) 10^{22}

d) 10^{24}

e) 10^{27}

Respuesta

Acá lo que tenemos que hacer es una estimación utilizando ordenes de magnitud. Sabemos que el radio de la tierra es $R_T \simeq 6400km$ y que el 70 % de la superficie del planeta es agua. Como valor razonable para la profundidad media del océano elegimos $1km$ (menos parece poco y más, mucho). Con estos números, si el planeta fuera todo agua, el volumen de agua que la rodea sería de $5{,}15x10^{17}m^3$. El 70 % de este valor representa el volumen de los mares de la tierra con lo que decimos que la respuesta correcta es la (b).

Problema 5, Óptica

Un rayo de luz que atraviesa agua incide sobre la superficie de un vidrio (índices de refracción n_a y n_v respectivamente). Para los ángulos de incidencia (α), de reflexión (β) y refracción (γ) vale:

a) $\alpha = \gamma$ y $n_a \operatorname{sen}(\alpha) = n_v \operatorname{sen}(\gamma)$

b) $\alpha = \beta$ y $n_a \operatorname{sen}(\gamma) = n_v \operatorname{sen}(\alpha)$

c) $\alpha = \beta$ y $n_a \operatorname{sen}(\alpha) = n_v \operatorname{sen}(\beta)$

d) $\alpha = \gamma$ y $n_a \operatorname{sen}(\beta) = n_v \operatorname{sen}(\gamma)$

e) $\alpha = \beta$ y $n_a \operatorname{sen}(\beta) = n_v \operatorname{sen}(\gamma)$

Respuesta

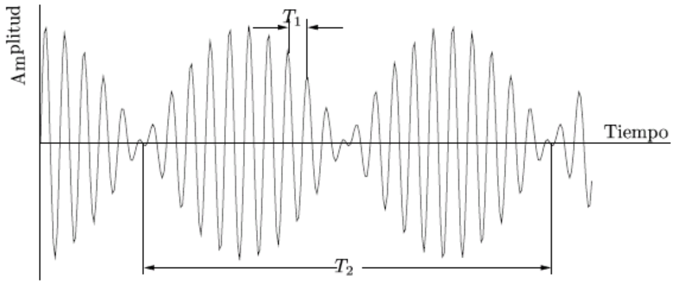
Sabemos que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión, o sea que $\alpha = \beta$. Con esto descartamos las opciones (a) y (d). Escribimos la ley de Snell:

$$n_a \operatorname{sen}(\alpha) = n_v \operatorname{sen}(\gamma)$$

Cómo $\alpha = \beta$, la respuesta correcta es la (e).

Problema 6, Oscilaciones y ondas

El gráfico de la figura muestra una resultante de:



a) La suma de dos ondas de la misma amplitud y frecuencias muy similares a $1/T_1$.

b) La suma de dos ondas de la misma amplitud y frecuencias $1/T_1$ y $1/T_2$.

c) La resta de dos ondas de la misma amplitud y frecuencias $1/T_1$ y $1/T_2$.

d) El producto de dos ondas de la misma amplitud y frecuencias muy similares a $1/T_1$.

e) El cociente de dos ondas de la misma amplitud y frecuencias $1/T_1$ y $1/T_2$.

Respuesta

Cuando se suman dos ondas de igual amplitud y frecuencias similares, el resultado puede escribirse como un producto de dos ondas. Una es una onda sinusoidal que oscila con una frecuencia igual a la semisuma de las frecuencias originales. La otra parte es un coseno que modula la amplitud con una frecuencia que es proporcional a la diferencia de frecuencias. Ese fenómeno se llama pulsación o batido y se lo suele aprovechar para afinar instrumentos musicales por comparación. Al tocar dos notas que son casi iguales, tenemos dos ondas sonoras de frecuencias similares f_1 y f_2, aproximadamente iguales a $1/T_1$. Vamos a escuchar un tono de frecuencia $1/T_1$ igual a la semisuma de las frecuencias, que aumenta y disminuye de intensidad con una frecuencia igual a $f_1 - f_2 = 2/T_2$ (ese es el batido). La respuesta correcta es la (a).

Problema 7, Mecánica

En ausencia de rozamiento, ¿con qué aceleración se moverán los bloques?

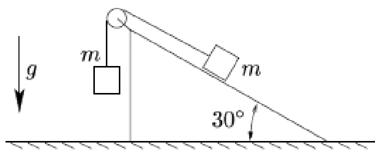
a) $\frac{1}{4}g$.

b) $\frac{1}{2}g$.

c) $\frac{3}{4}g$.

d) $\frac{7}{8}g$.

e) g.



Respuesta

Las fuerzas responsables del movimiento de los bloques son el peso y la tensión del hilo T. Ambos se moverán con la misma aceleración, uno en la dirección vertical (el que cuelga) y el otro en la dirección paralela a la superficie del plano inclinado. Planteando la sumatoria de fuerzas en cada uno vemos que:

$$T - mg \operatorname{sen} 30 = ma$$

$$-T + mg = ma$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que $a = g/4$ (opción (a)).

Problema 8, Mecánica

Dos cuerpos puntuales de masa m se unen a una varilla rígida y sin masa de longitud ℓ. La varilla pivotea a una distancia $\ell/4$ de uno de sus extremos, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la frecuencia de pequeñas oscilaciones del péndulo resultante?

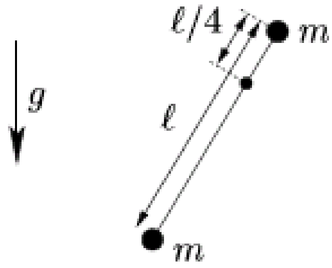
a) $\sqrt{\frac{4}{5}g/\ell}$.

b) $\sqrt{4g/\ell}$.

c) $\sqrt{5g/\ell}$.

d) $\sqrt{10g/\ell}$.

e) $\sqrt{20g/\ell}$.



Respuesta

Hay que encontrar la ecuación del movimiento para conocer la frecuencia de oscilación. Si llamamos θ al ángulo que forma la varilla con la vertical, el torque de la varilla al pivotar va a ser:

$$\tau = I\ddot{\theta}$$

El torque va a estar producido por las componentes del peso perpendiculares a la varilla. Si suponemos que las oscilaciones son pequeñas, podemos aproximar al seno por su ángulo y obtenemos la expresión del torque:

$$\tau = mg\operatorname{sen}\theta\frac{\ell}{4} - mg\operatorname{sen}\theta\frac{3}{4}\ell = -\frac{1}{2}mg\ell\theta$$

Calculamos ahora el momento de inercia:

$$I = m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + m\left(\frac{3}{4}\ell\right)^2 = \frac{5}{8}m\ell^2$$

Reemplazando todo esto en la primera ecuación, obtenemos la ecuación del movimiento en θ:

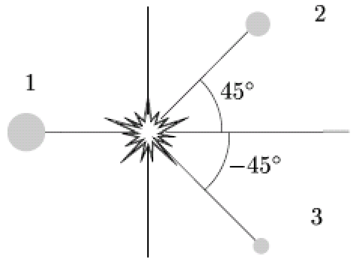
$$\ddot{\theta} + \frac{4}{5}\frac{g}{\ell}\theta = 0$$

que es la ecuación de un oscilador armónico. Vemos entonces que para θ pequeños, éste va a oscilar con una frecuencia $\sqrt{\frac{4}{5}g/\ell}$ (respuesta (a)).

Problema 9, Mecánica

Luego de una explosión, los fragmentos de un meteorito se distribuyen como se muestra en la figura.

El fragmento 1 tiene una masa de 3 kg y se desplaza en la dirección negativa del eje x a 200 m/s. El fragmento 2 pesa 2 kg y se mueve a 150 m/s, mientras que el fragmento 3 pesa 1 kg y se desplaza a 300 m/s. ¿En qué dirección se movía el meteorito antes de estallar?



a) Estaba quieto antes de estallar.

b) Se movía en la dirección negativa del eje x.

c) Se movía en la dirección positiva del eje x.

d) Se movía a 45^0 respecto del eje x.

e) Se movía a -45^0 respecto del eje x.

Respuesta

Planteamos la conservación del impulso antes y después de la explosión. Si la masa inicial era m_0 y se movía con una velocidad $\bar{v_0}$, planteamos la igualdad de los impulsos descomponiendo en x e y:

$$m_0 v_{0x} = -m_1 v_1 + (m_2 v_2 + m_3 v_3)\cos 45 < 0$$

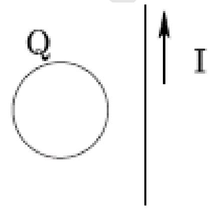
$$m_0 v_{0y} = (m_2 v_2 - m_3 v_3)\,\mathrm{sen}\,45 = 0$$

Vemos así que inicialmente la velocidad tenía una componente en x negativa y no tenía componente en y, con lo cuál la respuesta correcta es la (b).

Problema 10, Electricidad y magnetismo

Un anillo circular **aislante** y una alambre recto reposan sobre la superficie de un plano. El alambre, por el que circula una corriente I constante, está fijo al plano, mientras que el anillo está uniformemente cargado y puede girar y deslizarse sin rozamiento por el plano.

Al tiempo $t = 0$, con el anillo en reposo, la corriente I decrece instantáneamente a $I/2$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe mejor el movimiento del anillo para tiempos inmediatamente posteriores a $t = 0$?



a) El anillo gira en sentido horario y no se desliza.

b) El anillo gira en sentido antihorario y no se desliza.

c) El anillo gira en sentido horario y se desliza en dirección paralela al alambre.

d) El anillo gira en sentido antihorario y se desliza en dirección paralela al alambre, hacia arriba de la figura.

e) El anillo gira en sentido antihorario y se desliza en dirección perpendicular al alambre, alejándose.

Respuesta

Para tiempos inmediatamente posteriores a cuando baja la corriente, lo que importa para el movimiento es el campo eléctrico, que puede producir fuerza y/o torque sobre el anillo. El campo magnético sólo importa cuando ya se mueve (hay velocidad no nula).
Al bajar la corriente, se genera un campo eléctrico paralelo al alambre, con la misma dirección que la corriente (piensen en la ley de Faraday y Lenz: el E trata de restablecer la corriente), decreciente con la distancia al alambre, y dependiente del tiempo.
Ese campo eléctrico, produce una fuerza neta hacia arriba y también un torque que tiende a hacerlo girar en sentido antihorario. Fijensé que el campo eléctrico llega primero a la parte del anillo más próxima al alambre (y es más intenso allí), y eso da un torque neto que tiende a hacerlo girar en sentido antihorario.
Este no es un problema sencillo. Hay que limitar el análisis a tiempos inmediatamente posteriores a t= 0. Apenas el alambre empieza a moverse aparecen más fuerzas, ya que comienza a ver al campo magnético y ahí sí tiende a acercarse al alambre. El estado estacionario resulta complicado de obtener.

Problema 11, Mecánica

Un bloque pequeño de masa m se encuentra apoyado sobre un plano inclinado a 45^0, como se muestra en la figura. El plano inclinado, también de masa m, puede deslizar sin rozamiento sobre una superficie horizontal. Si inicialmente el bloque se encuentra a una altura h, ¿cuánto se desplazará en dirección horizontal hasta llegar al piso?

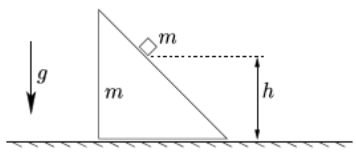
a) $\frac{1}{6}h$.

b) $\frac{1}{3}h$.

c) $\frac{1}{2}h$.

d) $\frac{2}{3}h$.

e) h.

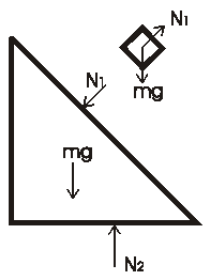


Pista

Si el plano inclinado no se pudiera mover, el bloque se desplazaría una distancia h hacia la derecha antes de llegar al piso (ver que el ángulo de inclinación es 45^0). Entonces, para calcular cuánto se desplaza el bloque hacia la derecha, tenemos que calcular cuánto se desplaza el plano inclinado hacia la izquierda por acción del peso del bloque y restárselo a h.

Respuesta

Comenzamos haciendo un diagrama de cuerpo libre para ver que fuerzas actúan sobre cada cuerpo. El bloque desliza sobre el plano con una aceleración $\bar{a}_b = (\frac{a_b}{\sqrt{2}}, \frac{a_b}{\sqrt{2}})$, y el plano inclinado desliza en la dirección negativa del eje x con una aceleración a_p.



Para encontrar el valor de estas aceleraciones, planteamos las sumatorias de fuerzas en:

El bloque:

$$\sum F_x = \frac{N_1}{\sqrt{2}} = m(\frac{a_b}{\sqrt{2}} - a_p)$$

$$\sum F_y = \frac{N_1}{\sqrt{2}} - mg = -m\frac{a_b}{\sqrt{2}}$$

El plano inclinado:

$$\sum F_x = -\frac{N_1}{\sqrt{2}} = -ma_p$$

Usando estas 3 ecuaciones despejo las aceleraciones de cada cuerpo:

$$a_b = \sqrt{2}\frac{2}{3}g$$

$$a_p = -\frac{g}{3}$$

Ahora puedo calcular cuánto tiempo tarda el bloque en deslizar hasta el final del plano inclinado y cuánto se desplaza el plano inclinado en ese tiempo. El bloque recorre una distancia $\sqrt{2}h$ en un tiempo $t = \sqrt{\frac{3h}{g}}$ y en ese tiempo el plano se desplazó una distancia $\frac{h}{2}$ hacia la izquierda, con lo cuál la respuesta correcta es la (c).

Problema 12, Calor y calorimetría

El nitrógeno gaseoso se vende envasado en cilindros de aproximadamente 0.24 m de diámetro y 1.40 m de altura. Cuando el tubo está lleno, el gas se encuentra a una presión de 160 atmósferas. Estime cuántos metros cúbicos de nitrógeno gaseoso, en condiciones normales de presión y temperatura, hay en un tubo cuando está lleno.

a) 0.06 m^3

b) 10 m^3

c) 4 x 10^{-4} m^3

d) 16 m^3

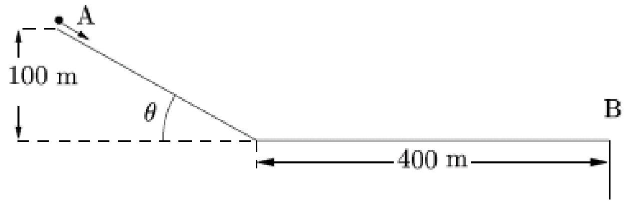
e) Ninguna de las respuestas anteriores.

Respuesta

Para resolver este problema, tratamos al nitrógeno como un gas ideal utilizando que $PV = cte$. Con esto se llega a que la respuesta correcta es la (b).

Problema 13, Mecánica

Un esquiador parte del reposo en el punto A y comienza a deslizarse por una pendiente plana, que forma un ángulo $\theta = 30^0$ con la horizontal. Luego de la pendiente la pista es horizontal, está 100 m más abajo que A, y termina en un barranco al cabo de 400 m (punto B).



¿Cuál es el coeficiente de rozamiento μ (común a ambas partes de la pista) si el esquiador termina de deslizarse justo en el punto B?

a) $\mu = \frac{1}{2}$

b) $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\mu = \frac{1}{4+\sqrt{3}}$

d) $\mu = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

e) $\mu = \frac{8\sqrt{3}}{5}$

Pista

Tenemos rozamiento y como es una fuerza no conservativa, la energía no se conserva. Esto quiere decir que vamos a ir perdiendo energía por fricción con la nieve.
Nota: En general, los coeficientes de rozamiento son menores que 1. Esto **NO** quiere decir que no existan coeficientes de rozamiento mayores. No es correcto entonces descartar de entrada la respuesta (e).

Respuesta

El esquiador comienza teniendo una energía potencial $E_0 = 100mg$ y termina quieto, o sea con energía $E_f = 0$. La energía perdida debido al rozamiento va a ser igual al trabajo de la fuerza de roce. Entonces calculamos la energía disipada en cada tramo y la vamos restando a la energía inicial para obtener una expresión para el coeficiente de rozamiento.
Durante la bajada por el plano inclinado, la fuerza de roce es:

$$F_r^i = \mu N = \mu mg \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mu mg$$

La distancia que recorre el esquiador hasta llegar al final de la pendiente es:

$$x_1 = \frac{100}{\operatorname{sen} 30} = 200m$$

Cuando llega a ese punto al que llamaremos C, perdió parte de su energía inicial por fricción:

$$E_C = E_0 - F_r^i \cdot x_1 = 100mg(1 - \sqrt{3}\mu)$$

Una vez que está en la zona horizontal, la fuerza de rozamiento pasa a ser:

$$F_r^h = \mu mg$$

El esquiador tiene que llegar al punto B con energía nula (se detiene). Esto es, toda la energía E_C con la que comienza el tramo horizontal tiene que ser igual a la energía disipada por la presencia de la fuerza de rozamiento F_r^h:

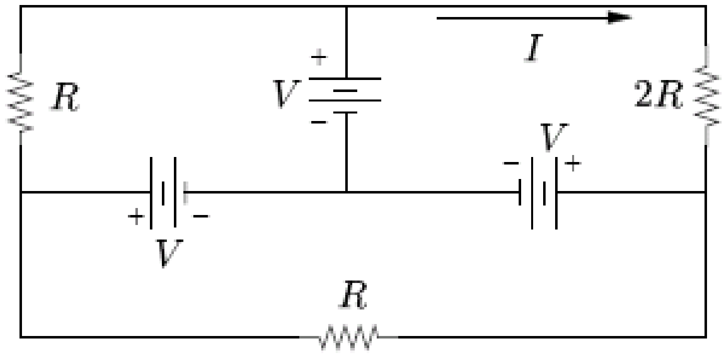
$$E_c = F_r^h \cdot 400$$

$$100mg(1 - \sqrt{3}\mu) = \mu mg400$$

De esta igualdad ya puedo despejar el valor del coeficiente de rozamiento y obtener que la respuesta correcta es la (c).

Problema 14, Electricidad y magnetismo

En el diagrama de la figura se representa un circuito con tres baterías idénticas, cada una con una fuerza electromotríz V, y tres resistencias, como se indica en la figura.



Además de los resistores que se observan en el diagrama, cada una de las baterías tiene una resistencia interna de 1 Ω. Si V = 10 V y R = 10 Ω, entonces la corriente I, medida en amperios es:

a) 1/3, con el sentido indicado en la figura.

b) 1/3, con sentido opuesto al indicado en la figura.

c) 3/10, con el sentido indicado en la figura.

d) 3/10, con sentido opuesto al indicado en la figura.

e) 0.

Respuesta

Para resolver este problema basta con plantear las leyes de Kirchoff en los nudos. De esta manera se ve rápidamente que la corriente I es nula y la respuesta correcta es la "e".

Problema 15, Mecánica

Un cable está suspendido entre dos postes. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) La tensión en los extremos de la cuerda es igual a su peso total.

b) La tensión en los extremos de la cuerda es igual a la mitad de su peso total.

c) La tensión en la cuerda es la misma en todo su largo.

d) La tensión en la cuerda es máxima en sus extremos.

e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Respuesta

En un problema de selección multiple no puedo hacer ninguna aclaración asi que tengo que elegir la respuesta más representativa. La opción (c) "La tensión en la cuerda es la misma en todo su largo" es cierta si la cuerda es de masa despreciable. La opción (d) "La tensión en la cuerda es máxima en sus extremos" es válida para todos los cables independientemente de su masa y por lo tanto es la respuesta correcta.

Problema 16, Hidrostática e hidrodinámica

Se tienen dos recipientes idénticos con agua, sobre sendas balanzas, que inicialmente marcan el mismo peso. En uno de ellos se sumerge una pelotita de ping-pong, ejerciéndose una fuerza F_1 para mantenerla justo sumergida. En el otro se hace lo mismo con una pelotita de madera, un poco más pesada que la primera pero del mismo tamaño. En este caso es necesaria una fuerza F_2 para mantenerla en su posición, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la relación entre las fuerzas F_1, F_2 y los pesos W_1, W_2 que marcan las balanzas en esta situación?

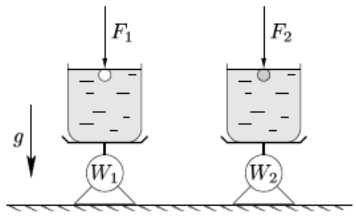
a) $F_1 < F_2, W_1 = W_2$.

b) $F_1 > F_2, W_1 = W_2$.

c) $F_1 < F_2, W_1 < W_2$.

d) $F_1 = F_2, W_1 < W_2$.

e) $F_1 > F_2, W_1 < W_2$.



Respuesta

Para sumergir las pelotitas, la fuerza que tenemos que hacer es la diferencia entre el empuje del agua y el peso de las mismas. El empuje va a ser el mismo en ambos casos: tienen el mismo volumen y por ello desplazan la misma cantidad de agua. Entonces, la fuerza que le tenemos que aplicar a la pelotita más liviana es mayor. Llegamos a que $F_1 > F_2$ y las únicas respuestas posibles son la (b) y la (e).
El peso que marque la balanza va a ser proporcional a la presión en el fondo del recipiente, proveniente de la columna de agua. Cómo las dos pelotitas tienen el mismo volumen, el nivel de agua en ambos recipientes es el mismo y por lo tanto $W_1 = W_2$. Vemos así que la respuesta correcta es la (b).

Problema 17, Óptica

Un objeto se encuentra a 30 cm de un espejo esférico convexo de 20 cm de radio de curvatura. La imagen se ubica a:

a) 7.5 cm del espejo, entre el objeto y el espejo.

b) 7.5 cm del objeto, entre el objeto y el espejo.

c) 15 cm del espejo, entre el espejo y el centro de curvatura.

d) 15 cm del objeto, entre el objeto y el espejo.

e) 7.5 cm del espejo, entre el espejo y el centro de curvatura.

Pista

Los espejos convexos siempre forman una imagen virtual, ya que el foco y el centro de curvatura son puntos imaginarios que están dentro del espejo y no pueden ser alcanzados. Entonces las únicas opciones posibles son las (c) y la (e).

Respuesta

Podemos hacerlo graficamente y ver que la respuesta correcta es la (e). O bien hacemos las cuentas, considerando positivas a las distancias que están a la izquierda del espejo y negativas las que están a la derecha. El foco $f = R/2$ está a la derecha del espejo y por lo tanto es negativo. Entonces usamos la ecuación para los espejos:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = -\frac{1}{10} - \frac{1}{30} \Rightarrow i = -7{,}5$$

Este valor es negativo, como esperábamos ya que la imagen se forma a la derecha del espejo. Entonces la opción (e) es la correcta.

Problema 18, Electricidad y magnetismo

Un circuito serie RLC se usa en una radio para sintonizar la estación de FM en 95.5 MHz que transmite ”El Balseiro en Nacional”. La resistencia del circuito es de 10 Ω, la inductancia es de 2 μH. ¿Cuál de los siguientes capacitores usaría el circuito?

a) 200 pF.

b) 50 pF.

c) 1 pF.

d) 0.2 pF.

e) 0.02 pF.

Respuesta

Una estación de radio se sintoniza cuando el circuito resuena a esa frecuencia. En este caso a $\nu = \omega/2\pi = 95{,}5MHz$. En un circuito RLC, la frecuencia es $\omega = 1/\sqrt{LC}$ y de ahí despejamos el valor de $C = 1$ pF (opción (c)).

Problema 19, Óptica

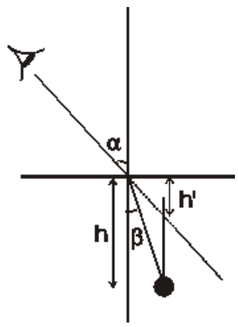
> A un buceador se le cae el tubo de oxígeno a 100 m de profundidad en un lago de aguas transparentes. Si mira en forma directa hacia el fondo, desde fuera del agua, ¿dónde se localiza la imagen del tubo? (índice de refracción del agua: n_a = 1.33)
>
> a) a 125 m.
>
> b) a 100 m.
>
> c) a 75 m.
>
> d) a 50 m.
>
> e) No se forma imagen del tubo.

Pista

De entrada descartamos la opción (a) (la imagen no se va a formar fuera del agua) la (b) (sabemos que va a verse como si estuviera a menor profundidad) y la (e) (sabemos que se puede ver).

Respuesta

Hacemos un diagrama del rayo que sale del tubo de oxígeno (el punto negro) con un ángulo de incidencia β y llega hasta el ojo con un ángulo de refracción α. Para el observador, el tubo se encuentra a una altura aparente h' que está en la intersección del rayo que incide en el ojo con la vertical que parte del tubo. Por la ley de Snell, sabemos la relación entre el ángulo de incidencia y el de refracción:



$$\operatorname{sen}\alpha = 1{,}33\operatorname{sen}\beta$$

Como el buceador está mirando en forma directa hacia el fondo, sabemos que α y β son ángulos muy pequeño y podemos aproximar los senos por las tangentes. Con un poco de geometría vemos que $\tan\alpha = \frac{x'}{h'}$ y $\tan\beta = \frac{x}{h}$. Como α y β son pequeños, $x \simeq x'$ y reemplazando en la ecuación de Snell encontramos una relación entre la altura real h y la aparente h':

$$\frac{1}{h'} = 1{,}33\frac{1}{h}$$

Vemos así que la respuesta correcta es la (c).

Problema 20, Hidrostática e hidrodinámica

Suponga un planeta con una atmósfera cuya densidad disminuye desde su superficie linealmente con la altura. Siendo la aceleración de la gravedad igual a g (constante con la altura) y la presión y la densidad sobre la superficie iguales a P_0 y ρ_0 respectivamente, la atmósfera del planeta llega hasta una altura igual a:

a) $\frac{2P_0}{\rho_0 g}$.

b) $\frac{P_0}{\rho_0 g}$.

c) $\frac{P_0}{2\rho_0 g}$.

d) ∞.

e) Debe conocerse la dependencia de la presión con la altura para determinar el resultado.

Pista

Usamos la ecuación diferencial de equilibrio hidrostático $dP = -\rho g dy$ para tener una relación entre la presión y la altura. Buscamos una expresión para la dependencia de la densidad con la altura e integramos. Cuando se acabe la atmósfera del planeta la presión será nula y de ahí despejamos hasta que altura llega.

Respuesta

La densidad varía linealmente con la altura desde su valor ρ_0 sobre la superficie hasta valer 0 a una cierta altura h. La expresión para la variación de la densidad con la altura es entonces:

$$\rho = \rho_0(1 - \frac{y}{h})$$

Reemplazamos esto en la ecuación de equilibrio hidrostático en integramos entre la superficie y la altura máxima que alcanza la atmósfera para obtener el valor de h:

$$\int_{P_0}^{0} dP = -\rho_0 g \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy$$

De allí sacamos que la respuesta correcta es la (a).

Problema 21, Mecánica

Para que un cuerpo sólido sometido a un conjunto de fuerzas esté en equilibrio, es necesario y suficiente que:

a) Las rectas de acción de todas las fuerzas pasen por su centro de masa.

b) La resultante del conjunto de todas las fuerzas sea nula.

c) El momento total de todas las fuerzas con respecto al centro de masa sea nulo.

d) El momento total de todas las fuerzas sea nulo, respecto a cualquier punto del espacio.

e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

Respuesta

Vamos analizando las opciones de a una. La (a) claramente no es cierta. La (b) es incompleta, faltaría que la suma de todos los momentos también sea nula. La (c) tampoco es cierta, porque esto no impide que el cuerpo se traslade. Ahora la (d) es la respuesta correcta. Decir que el momento resultante de todas las fuerzas es nulo para cualquier punto del espacio implica que la suma de todas las fuerzas es nula. Esto es fácil de ver en el caso extremo de tomar un punto muy lejano: todas las distancias son casi iguales (infinito) y para que los momentos se anulen, las fuerzas se tiene que anular.

Problema 22, Electricidad y magnetismo

Se mide el potencial electrostático en todas partes afuera de una esfera de radio R, encontrándose que es esféricamente simétrico, es decir, sólo depende de la distancia r al centro de la esfera siguiendo la ley A/r. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

a) La carga de la esfera es proporcional a A.

b) La fuerza ejercida por la esfera sobre una carga de prueba es radial.

c) La densidad de carga dentro de la esfera debe ser uniforme.

d) El trabajo realizado sobre una carga de prueba que describe una trayectoria cerrada es cero.

e) El módulo del campo eléctrico fuera de la esfera es solo función de r.

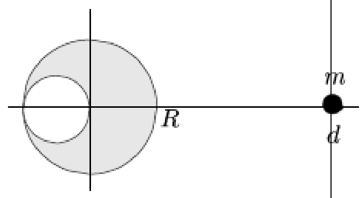
Respuesta

La fuerza que derive de ese potencial va a ser $F = -\frac{dV}{dr} = -\frac{A}{r^2} = qE$. Ahora con esto analizamos las opciones y vemos que la (a), la (b), la (d) y la (e) son falsas. La (c) es verdadera porque la forma de potencial que nos están dando es igual a la de una carga puntual, lo que indica que la esfera tiene una distribución de carga homogénea y esta es la respuesta correcta.

Problema 23, Mecánica

Una esfera homogénea de radio R y densidad ρ ejerce una fuerza gravitatoria F_0 sobre una partícula de masa m situada a una distancia d de su centro.

Si practicamos un agujero esférico de radio $R/2$ en la esfera, ubicado como se muestra en la figura, ¿con qué fuerza es atraída ahora la partícula por la esfera?



a) Con la misma fuerza F_0 con que la atraía antes de hacerle el agujero.

b) $\frac{7}{8}F_0$.

c) $\left[1 - \frac{d^2}{8(d+\frac{R}{2})^2}\right] F_0$.

d) $\left[1 - \frac{d^2}{(d+\frac{R}{2})}\right] F_0$.

e) Ninguna de las anteriores.

Pista

Para resolver este problema, lo más sencillo es utilizar el principio de superposición. Primero hay que calcular la atracción gravitatoria F_0 de la esfera sin agujero, después la atracción gravitatoria que ejercería una esfera del tamaño del agujero y situada en el mismo lugar y hacer la resta de las dos.

Respuesta

Para una esfera homogénea, la fuerza que ésta ejerce sobre una masa m es:

$$F_0 = \frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3 m}{d^2}$$

Para una esfera homogénea del tamaño y situación del agujero, la fuerza que ejerce sobre la masa m es:

$$F_a = \frac{G\rho\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8}m}{(d+\frac{R}{2})^2}$$

La esfera agujereada entonces ejerce una fuerza gravitatoria sobre m igual a $F_0 - F_a$ que corresponde a la respuesta (c).

Problema 24, Calor y calorimetría

Un gas ideal pasa del estado A al B intercambiando calor con el medio y siguiendo el proceso mostrado en la figura. ¿Cuál de las siguientes condiciones se cumple?

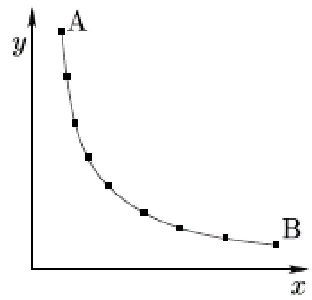
a) $x = P$, $y = T$, n, V constantes.

b) $x = P$, $y = V$, n, T constantes.

c) $x = V$, $y = T$, n, P constantes.

d) $x = P$, $y = V$, adiabática.

e) Ninguna de las anteriores.



Respuesta

El gas intercambia calor con el medio, por lo tanto la respuesta (d) es falsa. Usando la ecuación de los gases ideales podemos ver que la opción correcta es la (b).

Problema 25, Mecánica

Un niño, sentado sobre el borde de una pared, tira una pelota con una leve inclinación hacia abajo.

a) La velocidad con que la pelota llega al piso es mayor que si la tirara con igual inclinación, pero hacia arriba.

b) La velocidad con que llega al piso es menor que si la tirara con igual inclinación,pero hacia arriba.

c) La altura que alcanza después del primer rebote es mayor que si la tirara con igual inclinación, pero hacia arriba.

d) La altura que alcanza después del primer rebote es mayor que si la tirara horizontalmente.

e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

Pista

Cuando el niño tire la pelota con una inclinación hacia arriba, si despreciamos el rozamiento con el aire, ésta se eleva hasta una altura h por sobre la pared, describiendo una parábola simétrica hasta alcanzar nuevamente la altura de la pared. Esto equivale a lanzarla con la misma inclinación hacia abajo pero desplazada hacia adelante en la dirección horizontal.

Respuesta

Sabemos que la velocidad con que llegue al piso va a ser la misma en ambos casos, con lo cuál las afirmaciones (a) y (b) son falsas. Como en los dos casos la pelota llega con igual velocidad, la altura que alcanza después del primer rebote es la misma en ambos casos y la afirmación (c) es falsa. Al tirar la pelota con una ligera inclinación hacia abajo, estamos tirándola con una velocidad inicial según la dirección vertical. Eso hace que llegue al suelo con mayor velocidad que si la tirara en dirección horizontal (con velocidad inicial nula en la dirección vertical) y la afirmación (d) es cierta.

Examen de Matemática, 2003

Problema 1, Probabilidad

¿Cuál es la probabilidad de que, al arrojar dos dados, el producto de los dos puntajes resulte un número par?

a) $1/3$.

b) $1/2$.

c) $2/3$.

d) $3/4$.

e) $5/6$.

Pista

Para que el producto de par, o los dos dados dan puntaje par o uno da par y el otro impar.

Respuesta

La probabilidad que estamos buscando es:

$$P = (P_{D1}(par) \cap P_{D2}(par)) \cup (P_{D1}(impar) \cap P_{D2}(par)) \cup (P_{D1}(par) \cap P_{D2}(impar))$$

Cómo:

$$P_{Di}(par) = P_{Di}(impar) = 1/2$$

entonces:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

y la respuesta correcta es la (d).

Problema 2, Algebra

En el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + \alpha y + 4z = 1 \\ -x - \alpha y + \alpha z = \beta \end{cases}$$

α y β son constantes reales. ¿Para cuál de los siguientes casos no existe solución?

a) $\alpha = 3\ ,\quad \beta = 1$

b) $\alpha = -3\ ,\quad \beta = 0$

c) $\alpha = 0\ ,\quad \beta = 1$

d) $\alpha = 1\ ,\quad \beta = 0$

e) $\alpha = 2\ ,\quad \beta = -2$

Pista

Primero despejamos los valores de x, y y z en función de α y β. Queda:

$$x = 1 - \frac{\beta}{\alpha + 3}$$

$$y = -\frac{\alpha + 2\beta + 3}{\alpha(\alpha + 3)}$$

$$z = \frac{\beta}{\alpha + 3}$$

Ahora buscamos que valor de α nos lleva a no encontrar una solución para alguna de las variables.

Respuesta

Vemos que si $\alpha = 0$ o $\alpha = -3$ tenemos ceros en el denominador. Esto nos puede llevar a que una variable quede indeterminada o, si alguna de las variables nos queda de la forma $cte/0$, a que esta no tenga solución. Con esto podemos eliminar todas las opciones menos la (b) y la (c). En la opción (b), si $\beta = 0$ el valor de z queda indeterminado ($0/0$). En cambio en la opción (c), nos queda sin solución ($y = algo/0$ si $\beta = 1$).

Problema 3, Cálculo vectorial

Una curva espacial $\mathcal{C}$ está definida por las ecuaciones:

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1\,, \quad z = 4\,.$$

Entonces la integral de línea:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

($\times \equiv$ producto vectorial) resulta igual a:

a) 0.

b) $\pi^2/2\,(\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}})$.

c) $2\pi(\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}})$.

d) $16\pi\hat{\mathbf{z}}$.

e) $4\pi\hat{\mathbf{z}}$.

Pista

Primero nos conviene escribir $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ en función de las variables x, y, z:

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = (y\ dz - z\ dy)\hat{x} + (z\ dx - x\ dz)\hat{y} + (x\ dy - y\ dx)\hat{z}$$

Para resolver la integral de línea, pasamos cada término a una integral de superficie utilizando el teorema de Green:

$$\int_{\mathcal{C}} (Pdx\ +\ Qdy) = \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ dx\ dy$$

Respuesta

Teniendo en cuenta que $z = 4 = cte$ y por lo tanto $dz = 0$, se anulan los dos primeros términos. Vemos que la única componente que nos queda entonces es la correspondiente a $\hat{z}$ y las únicas opciones posibles son la (d) y la (e). La integral que tenemos que calcular ahora es directamente el área de la elipse de semiejes $a = 1$ y $b = 2$ generada por la curva $\mathcal{C}$, multiplicada por 2:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2\hat{z} \int dx\ dy$$

La respuesta correcta es $4\pi\ \hat{z}$ que es la opción (e).

Problema 4, Geometría analítica

Sean las rectas r_1 y r_2 definidas por:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \qquad r_2 : x - 2 = y - 1 = \frac{z-4}{\alpha}$$

r_1 y r_2 son perpendiculares:

a) Cuando $\alpha = 1$.

b) Cuando $\alpha = -1$.

c) Cuando $\alpha = 4$.

d) Cuando $\alpha = 5$.

e) Para todo α.

Pista

Tenemos dos ecuaciones que representan rectas, una en forma paramétrica y otra en forma canónica. De allí podemos obtener los cosenos directores de cada una.

Respuesta

Si las rectas son perpendiculares, sus directrices también lo son y el producto escalar de las mismas es cero. Obtenemos las directrices de las rectas: para la recta r_1: (3,2,-1) y para r_2: (1,1,α). Igualando el producto escalar de estos vectores a cero obtenemos que $\alpha = 5$ (opción (d)).

Problema 5, Cálculo diferencial e integral

Sea $f(x)$ la función definida para todo $x \neq 0$ como

$$f(x) = \int_{ax}^{bx} dy \, \frac{\tanh y \, \tan^2 y}{y^4}$$

donde a y b son números reales y positivos. Entonces el límite cuando $x \to 0^+$ de $f(x)$ es:

a) 0.

b) $+\infty$.

c) Indeterminado.

d) $\ln(b/a)$.

e) $\arctan(b/a)$.

Pista

El enunciado indica que $x \to 0^+$. Nos conviene ver como podemos aproximar al integrando cerca de 0 para simplificar la expresión.

Respuesta

Cómo estamos viendo que pasa alrededor de $x = 0$, aproximamos $\tan y$ y $\tanh y$ por y. Entonces nos queda la integral de $1/y$ y el resultado correcto es $ln(b/a)$ que es la opción (d).

Problema 6, Números complejos

En el plano complejo z se define la transformación $w = \exp z$. ¿Cuál es la imagen ante esta transformación de la región $|\mathrm{Re}(z)| \leq 1$?

a) Un semiplano.

b) Un sector circular.

c) Una corona circular.

d) Un círculo.

e) Ninguna de las anteriores.

Pista

Usando la notación polar, escribimos al número complejo como $z = re^{i\varphi}$. En el plano complejo está representado por un vector de módulo r y argumento φ.
El problema nos dice que la región de partida corresponde a los complejos cuya parte real tiene módulo inferior a 1, o sea que $0 \leq |r| \leq 1$. Esto es un circulo de radio 1. Ahora hay que ver cual es la representación en el plano de todos los números complejos ω que provienen de hallar la exponencial de los números complejos z comprendidos dentro de ese circulo.

Respuesta

Tenemos la transformación:

$$\omega = r'e^{i\varphi'} = e^{r\cos\varphi}e^{i\,\mathrm{sen}\,\varphi}$$

Como $|r\cos\varphi| \leq 1$, entonces el módulo de ω en su representación polar será $1 \leq |r'| \leq e$. El argumento no está limitado por lo cuál la imagen ante la transformación ω de la región que nos interesa está comprendida entre un circulo exterior de radio e y uno interior de radio 1. Esto es una corona circular (opción (c)).

Problema 7, Algebra vectorial

Un campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ se define como: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})\ \mathbf{w}(\mathbf{r})$ donde φ es el campo escalar: $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2$, mientras que $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ es el campo vectorial $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = (yz, zx, xy)$. Entonces, el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie exterior del cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ es:

a) 1.

b) 1/8.

c) 4/3.

d) 0.

e) Ninguno de los anteriores.

Pista

Escribimos el campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ en función de x, y, z y nos queda:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x^2 + y^2 + z^2)(yz, zx, xy)$$

Ahora calculamos el flujo del campo vectorial usando el teorema de la divergencia para pasar a una integral de volumen con una expresión más sencilla.

Respuesta

Usando el teorema de la divergencia nos queda:

$$\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}S = \int \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})\ dV$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 6\ xyz$, al resolver la integral triple obtenemos un valor de $3/4$ y la respuesta correcta es la (e).

Problema 8, Algebra vectorial

¿Cuál es la distancia mínima entre el punto de coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y el conjunto de los puntos del espacio que satisfacen la ecuación?

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

a) 2.

b) 1.

c) $\sqrt{2}$.

d) $\sqrt{3}$.

e) Ninguna de las anteriores.

Pista

Resolvemos el determinante para obtener la/las ecuaciones y ver que figura en el espacio representa.

Respuesta

Tenemos la ecuación de un plano que es:

$$y - x = 0$$

El punto (0,0,2) pertenece al plano y su distancia al mismo va a ser 0. La respuesta correcta es la (e).

Problema 9, Cálculo diferencial e integral

Considere la integral de línea en el plano:

$$I_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} (dxP + dyQ)$$

donde $\mathcal{C}$ es una curva cerrada que limita un recinto de área $\mathcal{A}$. Determine en cuál de los siguientes casos $I_{\mathcal{C}} = \mathcal{A}$:

a) $P = \cos x + 2xy - y\,,\;\; Q = x^2 + y^2 - \operatorname{sen} y\,.$

b) $P = y\,,\;\; Q = x\,.$

c) $P = x\,,\;\; Q = y\,.$

d) $P = x^2\,,\;\; Q = y^2\,.$

e) $P = y^2\,,\;\; Q = x^2\,.$

Pista

Tenemos que encontrar que relación tienen que cumplir P y Q para que la integral nos de el área encerrada por la curva.

Respuesta

Por el teorema de Green sabemos que:

$$\int_{\mathcal{C}} (dxP + dyQ) = \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Para que $I_{\mathcal{C}} = A$ tiene que ser $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Vemos que la opción (a) cumple esta condición y es por lo tanto la respuesta correcta.

Problema 10, Cálculo diferencial e integral

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} =$$

a) 0.

b) $\sqrt{2}$.

c) 1.

d) $1/\sqrt{2}$.

e) No existe.

Pista

En este caso no nos sirve aplicar L'Hopital. Buscamos de aproximar el denominador por su valor cerca del cero.

Respuesta

Hacemos un desarrollo de Taylor del coseno alrededor de cero:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Reemplazo esto en la ecuación y me queda:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \sqrt{2}$$

La respuesta correcta es la (b).

Problema 11, Cálculo diferencial e integral

Tenemos un cuadrado de cartón de lado a. Queremos hacer con él una caja sin tapa, quitando un cuadrado de cada esquina y plegándolo. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados para que la caja tenga el máximo volumen posible?

a) $a/2$.

b) $\sqrt{3}a$.

c) $\sqrt{3}/4\ a$.

d) 0.

e) $a/6$.

Pista

Buscamos la expresión del volumen en función del lado del cuadrado que vamos a recortar en cada esquina y luego maximizamos.

Respuesta

Llamamos b al lado de los cuadrados que quitamos en las esquinas. Entonces, el volumen de la caja es:

$$V = (a - 2b)^2 b$$

Calculamos los valores de b que satisfacen $\frac{dV}{db} = 0$ (obtenemos $b = a/2$ y $b = 1/6$). Para ver cuál de los dos valores es el máximo vemos el signo de la derivada segunda. La respuesta correcta es la (e).

Problema 12, Números complejos

La parte real de $z = i^{i^i}$ es ...

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) e^{π}.

c) $-\pi$.

d) $\ln \frac{\pi}{2}$.

e) 0.

Respuesta

Ponemos el número imaginario i en forma exponencial: $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Ahora elevamos a la i ambos miembros: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ y otra vez: $i^{i^i} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Éste último es un número imaginario puro, con parte real nula (opción (e)).

Problema 13, Probabilidad

Un jurado, compuesto por tres expertos, es contratado para opinar sobre la autenticidad de obras de arte. Luego de examinar cada ítem, cada experto vota (por "auténtico" o "falso"), y el dictamen del jurado se decide por mayoría. Dos de los expertos hacen su trabajo seriamente: cuando votan, lo hacen independientemente, y con una probabilidad p (la misma para ambos) de tomar la decisión correcta. El tercer experto, en cambio, antes de cada voto arroja una moneda y según el resultado sea cara o seca vota por auténtico o falso. ¿Cuál es la probabilidad de que una decisión del jurado sea acertada?

a) $\frac{1}{2}$.

b) p.

c) p^2.

d) $\frac{p^2}{2}$.

e) $\frac{p(1-p)}{2}$.

Respuesta

Dos de los jurados tienen probabilidad p de acertar y el otro, cómo decide tirando una moneda, tiene probabilidad 1/2. Para que la decisión sea acertada tienen que acertar los tres o acertar dos de los tres. Entonces, si llamamos A a acertar y F a fallar, la probabilidad P que estamos buscando es:

$$P = P(3A) \cup P(2A\ 1F)$$

$$P(3A) = p\,p\,\frac{1}{2} = \frac{p^2}{2}$$

$$P(2A\ 1F) = p\,p\,\frac{1}{2} + 2\,p(1-p)\frac{1}{2} = p - \frac{p^2}{2}$$

Vemos entonces que $P = p$ y la respuesta correcta es la (b).

Problema 14, Cálculo diferencial e integral

La condición de que en cada uno de los puntos de una curva en el plano su pendiente sea igual al doble de la suma de las coordenadas del punto define:

a) Una familia de hipérbolas.

b) Una única circunferencia.

c) Una familia de parábolas.

d) Una parábola que pasa por el origen.

e) Ninguna de las opciones anteriores.

Pista

Con la condición que nos imponen tenemos que resolver la ecuación diferencial $y' = 2x + 2y$. Para ello debemos encontrar la solución de la homogénea mas la particular.

Respuesta

La ecuación homogénea es: $y' - 2y = 0$ y la solución es $u = e^{2x}$.
Para la particular, proponemos una solución de la forma $v = Ax + B$ y vemos que los valores de las constantes son: $A = -1$ y $B = -1/2$.
La solución que estamos buscando es: $y = u + v = e^{2x} - x - \frac{1}{2}$ y por lo tanto la respuesta correcta es la (e).

Problema 15, Geometría analítica

En el conjunto de los puntos del plano que verifican la ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 = 3,$$

el punto donde la coordenada x alcanza su valor máximo es:

a) $x = -2$, $y = -1$.

b) $x = 2$, $y = 1$.

c) $x = 0$, $y = \sqrt{3}$.

d) $x = \sqrt{3}$, $y = 0$.

e) Ninguno de los anteriores.

Respuesta

Reordenando la ecuación, queda:

$$x - y = \pm\sqrt{3}$$

Esto representa dos rectas paralelas en el plano xy, con lo cuál el valor de x no está acotado y su máximo valor es infinito. La respuesta correcta es la (e).