Examen de Física, 2000

Problema 1, Mecánica

El eje de un motor de torque T mueve a través de un sistema de engranajes a otro eje igual al propio, E. Si el engranaje fijo al motor tiene un perímetro 10 veces menor que el del eje E:

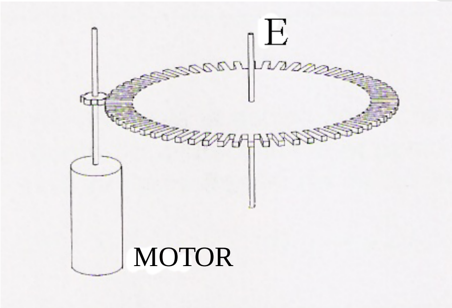
a) El torque del eje E será 10 veces mayor que el del eje del motor.

b) El torque del eje E será 10 veces menor que el del eje del motor.

c) El torque del eje E será $\sqrt{10}$ veces mayor que el del eje del motor.

d) El torque del eje E será $\sqrt{10}$ veces menor que el del eje del motor.

e) El torque del eje E será igual al del eje del motor.



Pista

Se supone que la transmisión es ideal; en consecuencia, la energía (potencia) se conserva durante la misma.

Respuesta

La potencia en un eje está dada por:

$$P = T \cdot \omega$$

donde P, T y ω indican la potencia, el torque y la velocidad angular, respectivamente.

Siendo una transmisión perfecta se tiene que:

$$P = T \cdot \omega_M = T_E \cdot \omega_E \quad \Rightarrow \quad T_E = \frac{\omega_M}{\omega_E} \cdot T$$

donde M indica "motor" y E indica "conducido". Dado que las velocidades tangenciales en el punto de contacto de los engranajes deben ser iguales, las velocidades angulares satisfacen:

$$\omega_M \cdot r_M = \omega_E \cdot r_E \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_M}{\omega_E} = \frac{r_E}{r_M} = 10$$

puesto que la relación entre los radios equivale a la relación entre los perímetros.

Reemplazando:

$$T_E = 10 \cdot T$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

Problema 2, Mecánica del punto

Una masa m desliza sin rozamiento por el cuarto de circunferencia que muestra la figura. La parte horizontal de la pista no es suave y hay rozamiento. La masa se frena a los $3\ m$. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento?

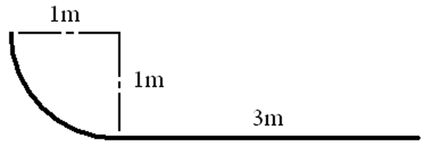
a) depende de la masa m.

b) $1/3$.

c) 3.

d) 1.

e) 2.



Respuesta

El trabajo realizado por la fuerza de fricción es igual al cambio de energía. Esto es:

$$-F \cdot d = \Delta E = \Delta U + \Delta K$$

donde F indica la fuerza de fricción y d es la distancia sobre la que actúa la anterior fuerza (en forma paralela al movimiento). E, U y K indican la energía mecánica, la energía potencial y la energía cinética, respectivamente. El signo menos indica que el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento se opone a la dirección del movimiento.

La fuerza de fricción es $F = \mu \cdot mg$, el cambio de energía potencial es $\Delta U = -mg \cdot h$ y el cambio de energía cinética es $\Delta K = 0$ (comienza y termina en reposo). La distancia sobre la que actúa la fuerza de fricción es la correspondiente al tramo recto, $d = 3\ m$. Por lo tanto:

$$-\mu \cdot mg \cdot d = -mg \cdot h \quad \Rightarrow \quad \mu = h/d = 1\ m/3\ m = 1/3$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (b).

Problema 3, Electricidad

Un capacitor de 6 μF y otro de 3 μF se conectan en serie con una fuente de alimentación de 2400 V. En equilibrio, la carga de cada capacitor es, aproximadamente:

a) $2{,}4 \times 10^{-3}\ C$.

b) $4{,}8 \times 10^{-3}\ C$.

c) $7{,}2 \times 10^{-3}\ C$.

d) $1{,}4 \times 10^{-3}\ C$.

e) $3{,}2 \times 10^{-3}\ C$.

Respuesta

La caída de potencial en el circuito en serie es:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

Por conservación de la carga, ambos capacitores deben estar cargados con la misma carga, $Q_1 = Q_2 = Q$. Entonces:

$$V = Q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = Q \cdot \frac{(C_1 + C_2)}{C_1 \cdot C_2}$$

Despejando la carga Q obtenemos:

$$Q = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot V = \frac{6 \cdot 3}{9}\ \mu F \cdot 2400\ V = 4{,}8 \times 10^{-3}\ C$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (b).

Problema 4, Electricidad y magnetismo

Una carga de $2\ C$ se mueve en un campo magnético uniforme de: $\vec{B} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}\ [N/A.m]$. La velocidad de la carga es $\vec{v} = 2\,\vec{i} + \vec{j}\ [m/s]$. La magnitud de la fuerza ejercida sobre la carga por el campo es:

a) $2\ N$.

b) $4\ N$.

c) $6\ N$.

d) $10\ N$.

e) $16\ N$.

Respuesta

La fuerza sobre la carga está dada por:

$$\vec{F} = q \cdot [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$$

El campo eléctrico $\vec{E}$ es cero. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= 2 \cdot \left[(2\,\vec{i} + \vec{j}) \times (3\,\vec{i} + 4\,\vec{j})\right]\ [C \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{N}{A \cdot m}] \\
&= 2 \cdot \left[(2 \cdot 4)(\vec{i} \times \vec{j}) + (1 \cdot 3)(\vec{j} \times \vec{i}))\right]\ [C \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{N}{C/s}] \\
&= 2 \cdot \left[8 \cdot \vec{k} + 3 \cdot (-\vec{k})\right]\ [N] = 10\,\vec{k}\ [N]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (d).

Problema 5, Mecánica del punto

Un paquete con instrumentos de masa m será lanzado desde una espacionave sobre la superficie de la Luna. Para estimar con precisión el lugar del impacto, ¿cuál de los siguientes factores es el menos importante?

a) La velocidad del paquete en el momento de lanzarlo.

b) La masa del paquete.

c) El período de rotación de la Luna.

d) La latitud de la Luna en el sitio del lanzamiento.

e) La altura sobre la Luna a la que es lanzado el paquete.

Respuesta

La cinemática de la caída no depende de la masa del objeto. Por lo tanto, claramente es el factor menos importante para estimar el lugar del impacto. La respuesta correcta es la (b).

Problema 6, Mecánica del punto

Se tiene una masa suspendida de un resorte, bajo la acción de la gravedad, y oscilando a una frecuencia f. Cuando la masa se encuentra en su punto de altura mínima, el punto de suspensión comienza a moverse hacia arriba con aceleración g. ¿Cuál será su nueva frecuencia de oscilación, f'?

a) $f' = \frac{f}{2}$.

b) $f' = \frac{f}{\sqrt{2}}$.

c) $f' = f$.

d) $f' = \sqrt{2}\, f$.

e) $f' = 2\, f$.

Respuesta

Llamemos y a la posición de la partícula desde un inercial ubicado en el piso. Esta magnitud puede expresarme como la suma de la posición del punto de suspensión, y_s, y la posición relativa de la partícula desde dicho punto, y_r. Escalarmente:

$$y = y_s - y_r$$

Diferenciando dos veces y aplicando la ley de Newton:

$$m\ddot{y} = m(\ddot{y}_s - \ddot{y}_r) = -mg + k(y_r - L)$$

donde k es la constante del resorte y L su longitud natural. Dado que el punto de suspensión se mueve con aceleración g hacia arriba, tenemos que:

$$\ddot{y}_r = 2g - (k/m) \cdot (y_r - L)$$

Llamando $z = y_r - L$ y $\omega^2 = k/m$, obtenemos:

$$\ddot{z} + \omega^2 \cdot z = 2g$$

La solución de la ecuación anterior (homogénea mas particular) está dada por:

$$z(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t) + \frac{2mg}{k}$$

Volviendo a la variable y:

$$y(t) = y_s - \left[A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t) + \frac{2mg}{k} + L \right]$$

En base al enunciado es posible evaluar las constantes A y B. Debido a que el punto de suspensión está acelerando hacia arriba, tenemos que $y_s = 1/2\ g\ t^2$. Sin embargo, nada de esto influye en la frecuencia del movimiento periódico que la partícula realiza en torno a su "posición" de equilibrio. Como se puede observar en la solución, dicha frecuencia es la misma que la del cuerpo con el punto de suspensión fijo. En consecuencia, la respuesta correcta es la (c).

Problema 7, Electricidad

Dos fuentes de resistencia interna igual a $1\ \Omega$ se conectan a una resistencia $R = 1\ \Omega$, como lo indica el circuito de la figura. Las fuentes son iguales, de modo que $V_1 = V_2 = 1\ V$. Si llamamos I_R a la corriente que circula por R, se cumple que:

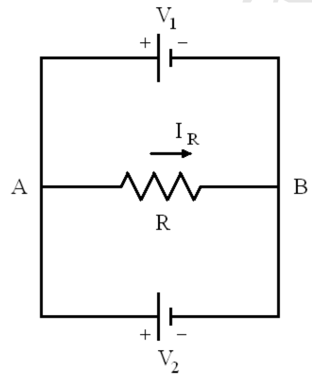
a) $I_R = 2/3\ A$.

b) $I_R = 1/3\ A$.

c) El potencial $U_{AB} = 2\ V$.

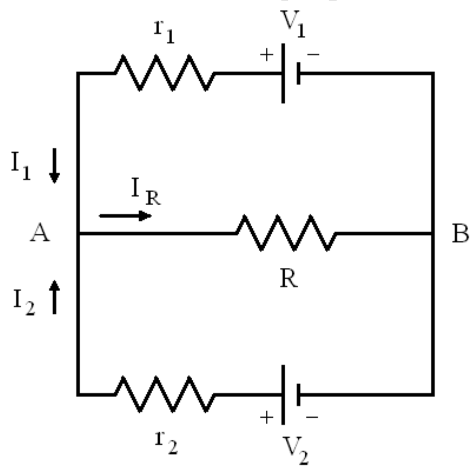
d) $V_1/I_R = 1\ \Omega$.

e) $I_R = 3/2\ A$.



Respuesta

Teniendo en cuenta las resistencias internas, tenemos que:



Entonces:

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 \cdot r_1 + I_R \cdot R \\ V_2 &= I_2 \cdot r_2 + I_R \cdot R \end{aligned}$$

donde r_i indica la resistencia interna de la fuente i. Sumando y teniendo en cuenta que $r_1 = r_2 = R$:

$$V_1 + V_2 = (I_1 + I_2) \cdot R + 2 \cdot I_R \cdot R$$

Por conservación de la carga se tiene que: $I_1 + I_2 = I_R$. Reemplazando:

$$V_1 + V_2 = I_R \cdot R + 2 \cdot I_R \cdot R = 3 \cdot R \cdot I_R$$

Por lo tanto:

$$I_R = \frac{V_1 + V_2}{3 \cdot R} = \frac{2\ V}{3\ \Omega} = 2/3\ A$$

En consecuencia, la respuesta correcta es la (a).

Problema 8, Mecánica del punto

Se deja caer una pelotita desde una altura h sobre un plano inclinado de modo que rebota elásticamente mientras desciende por el mismo. Después del primer rebote se cumple que:

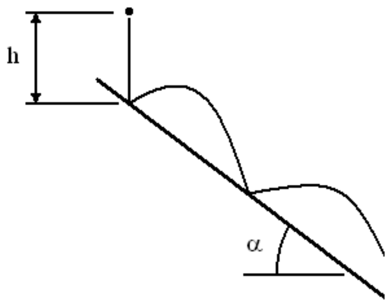
a) Los desplazamientos entre rebotes medidos sobre el plano son iguales.

b) Los intervalos de tiempo entre rebotes son siempre iguales.

c) Los desplazamientos medidos sobre el plano se duplican después de cada rebote.

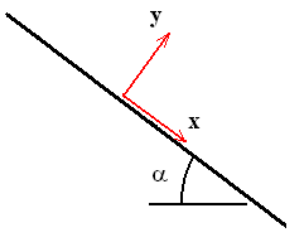
d) Los tiempos entre rebotes van duplicándose.

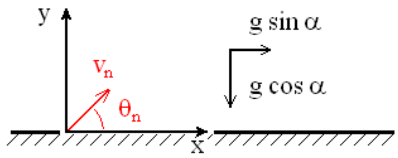
e) Los tiempos entre rebotes van disminuyendo, siendo cada uno la mitad del anterior.



Respuesta

Al llegar al plano inclinado la pelotita tiene una velocidad $v = \sqrt{2gh}$. A partir de ese punto, conviene plantear el problema en un sistema de coordenadas rotado, como se muestra en la siguiente figura.





En este sistema tenemos, en forma genérica, una partícula que sale a un dado ángulo θ_n, con una velocidad v_n, donde n indica el número de colisiones con el plano inclinado. En particular, debemos resolver el problema con aceleraciones tanto en y (caso de tiro oblicuo) como en x.

La cinemática de la partícula viene dada por:

$$\begin{aligned} a_x &= +g \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad v_x = v_n \cos\theta_n + g \sin\alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad x = v_n \cos\theta_n \cdot t + 1/2\, g \sin\alpha \cdot t^2 \\ a_y &= -g \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v_y = v_n \sin\theta_n - g \cos\alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad y = v_n \sin\theta_n \cdot t - 1/2\, g \cos\alpha \cdot t^2 \end{aligned}$$

En particular, estamos interesados en dos cantidades: el tiempo que tarda en llegar nuevamente al suelo, t_n, y el desplazamiento recorrido, R_n.

De la segunda ecuación obtenemos el tiempo que tarda en llegar nuevamente al suelo, $y(t_n) = 0$:

$$t_n = \frac{2v_n \sin\theta_n}{g\cos\alpha}$$

Reemplazando este tiempo en la primera ecuación obtenemos el desplazamiento recorrido, $R_n(t_n)$:

$$R_n = \frac{2v_n^2 \sin\theta_n}{g\cos\alpha}\left[\cos\theta_n + \sin\theta_n \operatorname{tg}\alpha\right]$$

Para hallar cualquier tipo de relación entre los rebotes debemos saber qué velocidad y ángulo tiene la pelotita cuando llega nuevamente al plano inclinado. En particular, las componentes de las velocidades cuando llegan al punto de rebote son:

$$\begin{aligned} v_x(t_n) &= v_n\left[\cos\theta_n + 2\sin\theta_n \operatorname{tg}\alpha\right] \\ v_y(t_n) &= -v_n \sin\theta_n \end{aligned}$$

Claramente podemos observar que la componente vertical de la velocidad, al llegar nuevamente al piso, es la misma que al partir pero con el signo opuesto. Luego del rebote, esta componente se invierte y tendremos que:

Componente vertical: $v_{n+1}\sin\theta_{n+1} = v_n \sin\theta_n$

De la expresión para el tiempo que tarda la pelotita en llegar nuevamente al suelo podemos observar que:

$$t_{n+1} = \frac{2v_{n+1}\sin\theta_{n+1}}{g\cos\alpha} = \frac{2v_n \sin\theta_n}{g\cos\alpha} = t_n$$

Dado que, entre rebotes, se conserva la componente vertical de la velocidad inicial, el tiempo que tarda la pelotita en llegar al suelo es la misma para cualquiera de ellos. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (b).

Problema 9, Mecánica

Sea el sistema de una cadena y dos poleas dentadas solidarias de radios R y r, mostrado en la figura. Para que la razón w/F sea 4, la razón R/r debe ser:

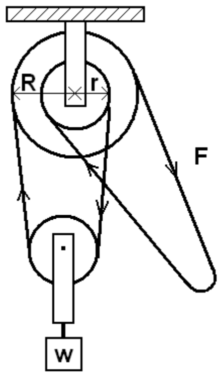
a) 1.

b) $1/2$.

c) 2.

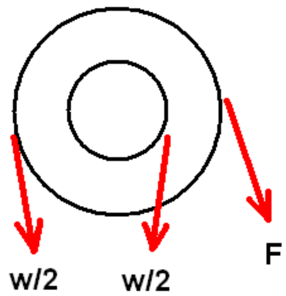
d) 4.

e) $1/4$.



Respuesta

El diagrama de cuerpo libre de las poleas solidarias es:



Planteando equilibrio de momentos desde el centro de ambas poleas obtenemos:

$$F \cdot R + (w/2) \cdot r - (w/2) \cdot R = 0$$

Despejando:

$$\frac{w}{F} = \frac{2R}{R - r}$$

Dado que $w/F = 4$, tenemos que:

$$\frac{2R}{R - r} = 4 \quad \rightarrow \quad R/r = 2$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (c).

Problema 10, Mecánica del punto

Tres bloques idénticos A, B y C, cada uno pesando $100\ N$, están apilados como se muestra en la figura. En la misma figura se indican los coeficientes de fricción estáticos entre cada superficie. Si se incrementa gradualmente la fuerza aplicada P desde cero, ¿para qué valor de P se perderá el equilibrio?

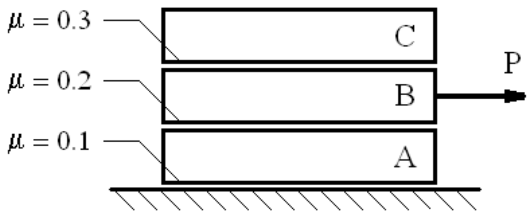
a) $20\ N$.

b) $30\ N$.

c) $40\ N$.

d) $60\ N$.

e) $70\ N$.



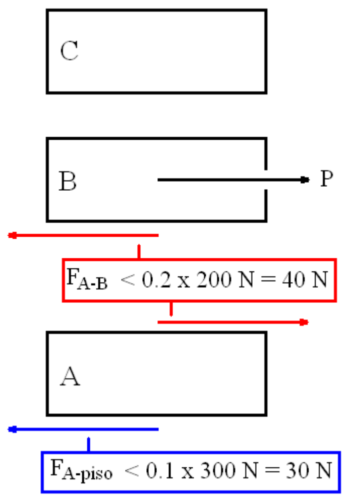
Respuesta

Debemos analizar la situación en equilibrio (y a punto de perderlo). El cuerpo C no puede tener una fuerza aplicada; de otro modo, estaría acelerando. Por lo tanto, la interacción de fricción entre los cuerpos B y C es nula.

Por otro lado, la interacción máxima de fricción entre el cuerpo A y el piso es $F_{A-piso} \leq \mu_{A-piso} \times N_{A-piso}$. La normal entre el piso y el cuerpo es todo el peso por encima: $N_{A-piso} = 300\ N$. Por lo tanto, la máxima fuerza de fricción posible entre A y el piso es $30\ N$.

En forma análoga, la máxima interacción de fricción posible entre los cuerpos A y B es $F_{A-B} \leq \mu_{A-B} \times N_{A-B}$. La interacción normal es $200\ N$; por lo tanto, la máxima fuerza de fricción posible entre A y B es $40\ N$.

La siguiente figura muestra la situación:



Claramente, para mantener el equilibrio del cuerpo A, la fuerza desarrollada entre A y B no puede superar los $30\ N$. En consecuencia, del análisis de equilibrio para el cuerpo B, la propia fuerza P aplicada no puede superar este valor. Por lo tanto, el equilibrio se pierde para $P = 30\ N$ y la respuesta correcta es la (b).

Problema 11, Óptica

¿Cuál de los siguientes fenómenos se puede utilizar para mostrar evidencia experimental de que las ondas de luz son transversales y no longitudinales?

a) El efecto fotoeléctrico.

b) Interferencia.

c) Difracción.

d) Polarización.

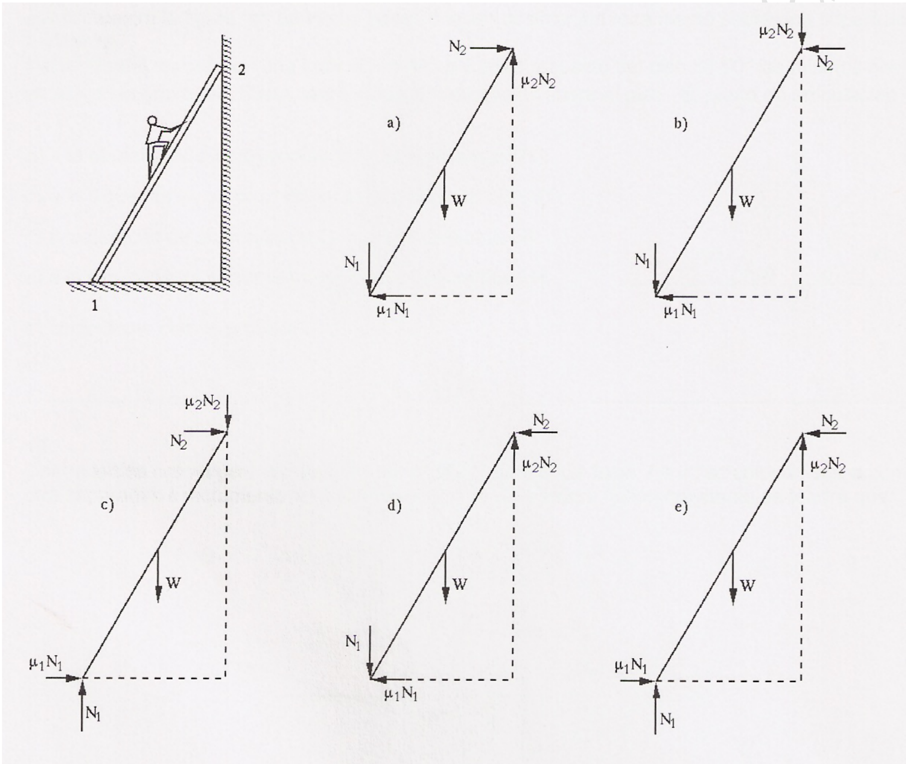
e) Reflexión.

Respuesta

Las ondas longitudinales no son polarizables debido a que las oscilaciones se desarrollan en la dirección de propagación de la misma. Siendo la luz una onda polarizable, al menos debe ser transversal. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (d).

Problema 12, Mecánica

Un pintor de peso W se para en una escalera de masa despreciable que está a punto de deslizarse, como se muestra en la figura. ¿Cuál de los siguientes es el diagrama correcto de fuerzas actuantes sobre la escalera?



Respuesta

Debido a que no existe ningún tipo de fijación entre la escalera y la pared o entre la escalera y el piso, la fuerza **normal** ejercida tanto por la pared como por el piso sobre la escalera solo puede ser saliente. Además existirá una fuerza de fricción **paralela** a las superficies. De acuerdo a los distintos gráficos, solo la respuesta (e) presenta esta característica para las fuerzas normales. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (e).

Problema 13, Calor

Una cacerola con agua hirviendo sobre una hornalla se tapa herméticamente y se comienza a disminuir su presión con una bomba mecánica conectada a un orificio en la tapa. Después de unos minutos:

a) La temperatura del agua sube manteniéndose constante el nivel de agua.

b) La temperatura del agua desciende y el nivel también.

c) La temperatura del agua no cambia ya que sólo depende del calor entregado por la hornalla y el nivel de agua desciende.

d) La temperatura del agua no cambia ya que sólo depende del calor entregado por la hornalla y el nivel de agua se mantiene constante.

e) La temperatura del agua aumenta proporcionalmente a la cantidad extra de agua que se evapora.

Respuesta

El agua se encuentra en un proceso de transformación de fase (líquido-vapor). En el momento en que se tapa el recipiente, el sistema representa un sistema cerrado. Si la presión a la cual transcurre el proceso disminuye, entonces la temperatura también debe hacerlo (mientras se encuentre en equilibrio líquido-vapor).

La disminución de la presión puede provocar un aumento o una disminución en el nivel del líquido (esto es, el título de la mezcla puede disminuir o aumentar, respectivamente) dependiendo de la situación inicial (en particular, del lado en la campana de equilibrio líquido-vapor en que se halla inicialmente). Sin embargo, la cacerola sigue sobre la hornalla; por lo tanto, al cabo de un tiempo el nivel deberá disminuir (la adición de calor provoca que mas agua vaya pasando a la fase vapor).

En consecuencia, la respuesta correcta es la (b).

Problema 14, Mecánica

Dos barras de longitudes idénticas l y masas diferentes $m_1 = m$ y $m_2 = 2\,m$ están articuladas por un extremo como muestra la figura, en tanto sus bases pueden deslizar sin rozamiento sobre una superficie plana horizontal. Partiendo del reposo con una inclinación de las barras respecto del piso de $60°$, las mismas deslizan bajo la acción de la gravedad hasta caer y quedar horizontales sobre el piso. El punto de articulación a quedará:

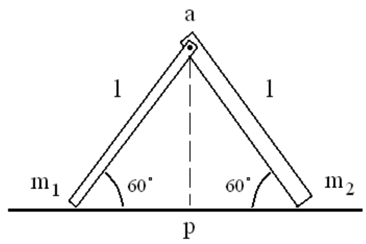
a) A la derecha de su proyección p y a una distancia $l/12$.

b) A la izquierda de su proyección p y a una distancia $l/12$.

c) A la derecha de su proyección p y a una distancia $l/4$.

d) A la izquierda de su proyección p y a una distancia $l/4$.

e) Coincidente con su proyección p.



Respuesta

Dada la ausencia de rozamiento, no existen fuerzas externas en la dirección horizontal. Por lo tanto y dado que inicialmente se encuentra en reposo, la componente x del centro de masa se mantiene constante.

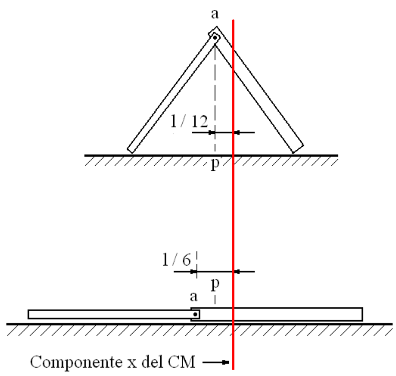
Inicialmente, la componente x del centro de masa, medida desde el punto a, es:

$$x_{cm} = \frac{m_1 \cdot (-l/2)\cos 60° + m_2 \cdot (l/2)\cos 60°}{m_1 + m_2} = \frac{-m \cdot l/4 + 2m \cdot l/4}{3m} = l/12$$

Cuando la barra se encuentra extendida en el piso, la componente x del centro de masa, medida desde el punto a (en el piso) es:

$$x_{cm} = \frac{m_1 \cdot (-l/2) + m_2 \cdot (l/2)}{m_1 + m_2} = \frac{-m \cdot l/2 + 2m \cdot l/2}{3m} = l/6$$

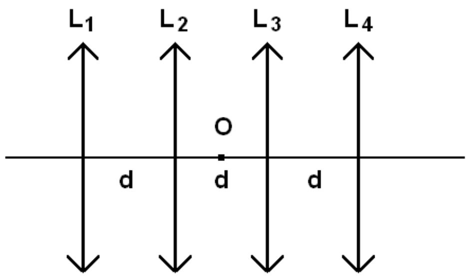
La siguiente figura ilustra la situación:



Dado que la componente horizontal del centro de masa se mantiene en el mismo lugar, el punto a quedará a una distancia $l/12$ a la izquierda del punto p. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (b).

Problema 15, Óptica

Cuatro lentes convergentes delgadas idénticas, con distancia focal $f = d$, se colocan una a continuación de la otra separadas exactamente en d (ver figura). Para el sistema óptico resultante se tendrá que:



a) El foco objeto del sistema se encuentra en el punto O.

b) El foco objeto del sistema está a una distancia $1/2\ d$ a la izquierda de L_1.

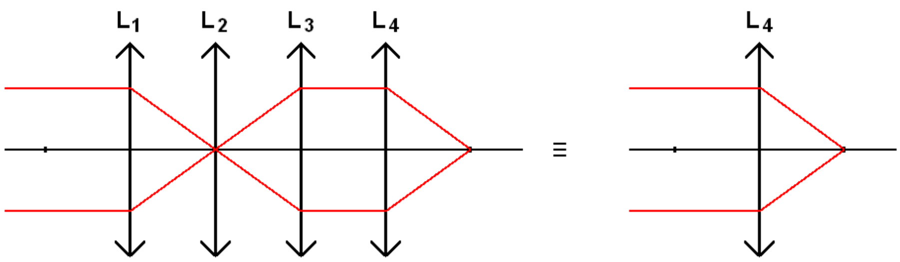
c) Para objetos situados a la izquierda de L_1 a una distancia mayor que d, la imagen resultante es real e invertida.

d) El sistema se comporta como una lente gruesa divergente.

e) El foco imagen coincide con el foco imagen de L_4.

Respuesta

En la aproximación paraxial (rayos alrededor del eje axial o ángulos pequeños), el sistema óptico equivalente es la lente en la que todos los rayos incidentes paralelos convergen al mismo punto que en el sistema al que representa, y está ubicada de tal forma que el punto de convergencia define su foco. La siguiente figura representa la presente situación:



Por lo tanto, la respuesta correcta es la (e).

Problema 16, Oscilaciones y Ondas

Un tren de ondas sinusoidal que se desplaza hacia la izquierda choca con un tren de ondas que se desplaza hacia la derecha. En $t = 0$ y $x = 0$, el desfasaje es δ $(-\pi \leq \delta \leq \pi)$. La velocidad y frecuencia de ambos trenes es la misma y las amplitudes son idénticas, entonces la resultante es:

a) Una onda que viaja hacia la izquierda o derecha de acuerdo al valor de δ, con amplitud igual a la original.

b) Una onda estacionaria con nodos distanciados en $\lambda/2$.

c) Una onda estacionaria con nodos distanciados en $(1 + \delta/\pi)\ \lambda/2$.

d) Una onda que viaja hacia la izquierda o derecha de acuerdo al valor de δ, con el doble de amplitud.

e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Respuesta

Para responder este problema rápidamente, es conveniente escribir las ondas en notación compleja. Así, las ondas están dadas por:

$$S_i(x,t) = A \cdot e^{i\cdot(\omega t + kx)} \tag{1}$$
$$S_d(x,t) = A \cdot e^{i\cdot(\omega t - kx + \delta)} \tag{2}$$

La resultante de ambas ondas es:

$$S_r(x,t) = S_i(x,t) + S_d(x,t) = A \cdot e^{i\cdot(\omega t + kx)} + A \cdot e^{i\cdot(\omega t - kx + \delta)} \tag{3}$$
$$= A \cdot e^{i\omega t} \cdot \left[e^{ikx} + e^{i(-kx+\delta)} \right] \tag{4}$$

En particular, multiplicando y dividiendo el primer sumando en el término entre corchetes por $e^{i\delta/2}$ y descomponiendo en dos el término $e^{i\delta}$ en el segundo sumando, obtenemos:

$$S_r(x,t) = A \cdot e^{i\omega t} \cdot \left[e^{ikx} \cdot e^{i\delta/2} \cdot e^{-i\delta/2} + e^{-ikx} \cdot e^{i\delta/2} \cdot e^{i\delta/2} \right] \tag{5}$$
$$= A \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\delta/2} \cdot \left[e^{i(kx-\delta/2)} + e^{-i(kx-\delta/2)} \right] \tag{6}$$

La expresión anterior indica que los nodos (esto es, la modulación espacial de la onda) queda determinada por el término entre corchetes. En particular:

$$\left[e^{i(kx-\delta/2)} + e^{-i(kx-\delta/2)} \right] = 2 \cdot \cos(kx - \delta/2)$$

de modo que la resultante es:

$$S_r(x,t) = 2A \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\delta/2} \cdot \cos(kx - \delta/2)$$

Los nodos quedan determinados por la anulación de la modulación espacial. Así:

$$\cos(kx - \delta/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad kx - \delta/2 = (2n-1)\pi/2 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Explícitamente y teniendo en cuenta que $k = 2\pi/\lambda$, los nodos se ubican en:

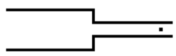
$$x_n = \left[(n - 1/2) + \delta/2\pi \right] \lambda/2 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

De este modo, la onda resultante es estacionaria y los nodos están equiespaciados en $\Delta x = x_{n+1} - x_n = \lambda/2$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (b).

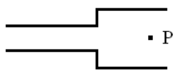
Problema 17, Electricidad y magnetismo

Un electrón se mueve con velocidad v, de izquierda a derecha, a lo largo del eje central de un cilindro metálico infinitamente largo. Si quiero aumentar la velocidad del mismo, de modo que en el punto P valga $v + dv$:

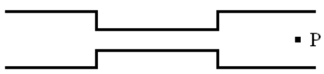
a) Reduzco el diámetro del cilindro.



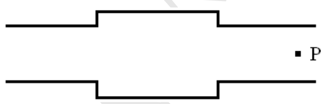
b) Aumento el diámetro del cilindro.



c) Cambio un tramo de longitud finita por un cilindro de menor diámetro.



d) Cambio un tramo de longitud finita por un cilindro de mayor diámetro.



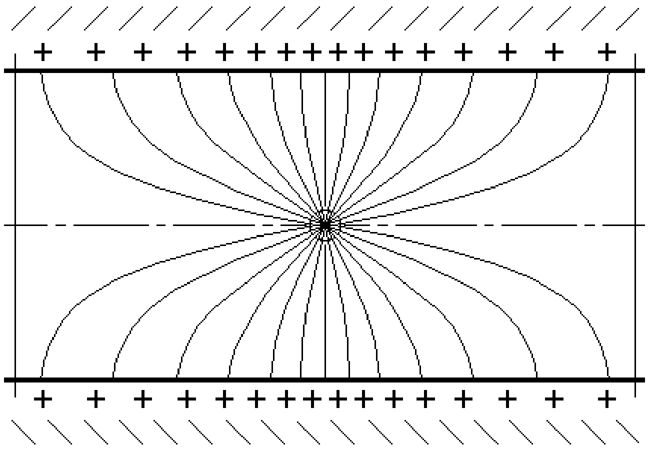
e) No puedo, es imposible cambiar la velocidad del electrón cambiando de cualquier manera el diámetro del cilindro.

Respuesta

Suponiendo que el electrón se mueve a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz, el sistema puede analizarse como una situación estática. Así, el electrón con velocidad v induce una distribución de cargas en la superficie del conductor, de manera que las líneas de campo salgan perpendiculares y el sólido sea equipotencial. Aunque nada dice el enunciado, se considera que esta situación se alcanzó de alguna manera y existió algún proveedor de cargas positivas. La situación se esquematiza en la siguiente figura.

La distribución de cargas acompaña al movimiento del electrón y, por ello, no existen fenómenos magnéticos de interés.

La respuesta a este problema surge del análisis cualitativo del sistema. Supongamos que el conductor tuviese un radio r_1. La situación estacionaria, en donde el electrón adquiere una velocidad v y el sistema es invariante en un inercial que lo acompaña, presenta una distribución de cargas positivas sobre la superficie del conductor. Debido a los signos opuestos, esta distribución de cargas, en conjunto con el electrón, posee una energía potencial eléctrica negativa. Supongamos ahora que el radio r_1 se lleva al infinito. En este caso, la distribución total de cargas tendrá una energía eléctrica nula. Sin llegar a tal límite, aumentar el radio del conductor, $r_1 \to r_2$, hace que la energía eléctrica pase de E_1 a E_2, donde $E_1 < E_2 < 0$. En consecuencia, aumentar el radio del conductor aumenta la energía del campo eléctrico (siempre en el rango de energías negativas) y, por lo tanto, menor energía queda disponible para el resto de las formas. En particular, en el rango analizado, la única otra forma de energía disponible es la energía cinética. Por lo tanto, aumentar r implica disminuir la energía cinética o, equivalentemente, la velocidad.



Por el contrario, la disminución del radio del conductor dispone de mas energía para la cinética del electrón y, consecuentemente, aumenta la velocidad del mismo. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

Problema 18, Mecánica del punto

Se tiene un péndulo colgado del techo de un carro móvil. Inicialmente el péndulo está oscilando y el carro frenado. En el instante en que el péndulo está en un extremo de la oscilación se quitan los frenos del carro, el cual puede comenzar a rodar sin fricción. Decir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

a) La amplitud de oscilación, medida desde el sistema de referencia inercial de la Tierra, se mantiene.

b) La amplitud de oscilación, medida desde el sistema de referencia inercial de la Tierra, aumenta.

c) La amplitud de oscilación, medida desde el sistema de referencia del carro, se mantiene.

d) La amplitud de oscilación, medida desde el sistema de referencia del carro, aumenta.

e) La velocidad del péndulo al pasar por su punto de menor altura, medida desde la Tierra, se mantiene.

Respuesta

Los frenos del carro se sueltan cuando la amplitud es máxima. A partir del momento en que se sueltan los frenos ya no existen fuerzas externas en la dirección horizontal; por lo tanto, la velocidad del centro de masa del sistema compuesto (péndulo + carro) se mantiene constante. En particular, la condición inicial indica que tanto el péndulo como el carro se hallan en reposo (el péndulo está en su amplitud máxima). Por lo tanto, la velocidad del centro de masa debe ser cero para todo momento posterior.

Ya con el movimiento compuesto, el péndulo alcanza su máxima amplitud (desde el sistema de referencia del carro) cuando tiene velocidad cero. En base a lo anterior, el carro también debe tener velocidad cero en ese instante. En consecuencia y por conservación de la energía, la amplitud del péndulo debe ser la misma que antes de soltar los frenos.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (c).

Problema 19, Mecánica del punto

Despreciando la fricción entre todos los planos, si F es $(3)^{1/2}$ veces menor que el peso de la masa M, ¿cuál es el ángulo θ para lograr un equilibrio estático?

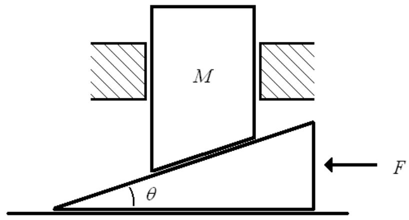
a) $5°$

b) $10°$

c) $15°$

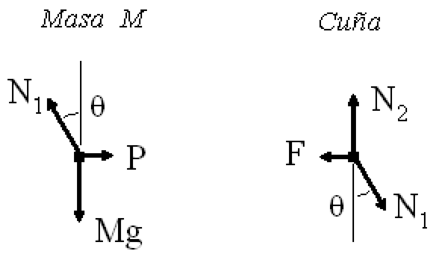
d) $30°$

e) $40°$



Respuesta

Planteando los balances de fuerzas para la masa M y la cuña:



donde:

Mg: Peso de la masa M.

P: Reacción de los soportes laterales.

N_1: Interacción entre la masa y la cuña.

N_2: Reacción del piso.

F: Fuerza aplicada.

Del balance para la masa M:

$$Mg = N_1 \cdot \cos\theta$$

Del balance para la cuña:

$$F = N_1 \cdot \sin\theta$$

Eliminando N_1 de ambas ecuaciones obtenemos:

$$F = Mg \cdot \tan\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = F/Mg$$

Teniendo en cuenta que $F = Mg/\sqrt{3}$, entonces:

$$\tan\theta = 1/\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 30°$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (d).

Problema 20, Física

El verano pasado se difundió la noticia del desprendimineto de un témpano de hielo de la Antártida. Debido a las grandes dimensiones del mismo ($1000\ km^2$ de superficie x $1000\ m$ de espesor) algunas organizaciones ambientalistas advertían acerca de la posibilidad de aumento del nivel del mar cuando el témpano se derritiera. Considerando que la densidad del agua es de $1000\ kg/m^3$, mientras que la del hielo es $900\ kg/m^3$, ¿en cuánto estimaría dicho aumento?

a) Menos de $30\ \mu m$.

b) Entre $200\ \mu m$ y $400\ \mu m$.

c) Entre $1\ mm$ y $5\ mm$.

d) Entre $10\ cm$ y $50\ cm$.

e) En realidad, el nivel disminuirá entre $1\ mm$ y $5\ mm$.

Respuesta

El témpano de hielo se halla flotando sobre el mar. En esta situación, el témpano desplaza un volumen de agua tal que se logra mantener a flote. El empuje que experimenta es el dado por el peso del agua desalojada. Dado que cuando se derrita pasará a tener la densidad del agua líquida, el volumen desalojado para sostenerse a flote es exactamente el que ocupará una vez derretido. Por lo tanto, no existe cambio en el nivel del mar.

Sin embargo, la composición del hielo no es exactamente igual a la del agua de mar (el agua de mar es salina). Todos sabemos que flotamos mejor en agua de mar que en agua de río (la cual tiene aproximadamente la composición del hielo de la Antártida); esto sucede porque la densidad del agua de mar es mayor que la del río y, en consecuencia, necesitamos desalojar un volumen menor. Supongamos que estimamos que la diferencia es de aproximadamente un $1\ \%$: $\rho_{a,mar}/\rho_{a,rio} = 1{,}01$. Entonces tendremos que, mientras que el volumen de agua desalojado cuando el témpano está flotando es $V_{d,h} = m_h/\rho_{a,mar}$, el volumen que ocupa el témpano derretido es $V_a = m_h/\rho_{a,rio}$. La diferencia de volúmenes es:

$$\Delta V = V_a - V_{d,h} = m_h \cdot \left(\frac{1}{\rho_{a,rio}} - \frac{1}{\rho_{a,mar}}\right) = \frac{V_h \cdot \rho_h}{\rho_{a,mar}} \cdot \left(\frac{\rho_{a,mar}}{\rho_{a,rio}} - 1\right)$$

Numéricamente:

$$\Delta V = \frac{1000\ km^2 \cdot (1000\ m/km)^2 \cdot 1000\ m \cdot 900\ kg/m^3}{1000\ kg/m^3} \cdot (1{,}01 - 1) = 9{,}0 \times 10^9\ m^3$$

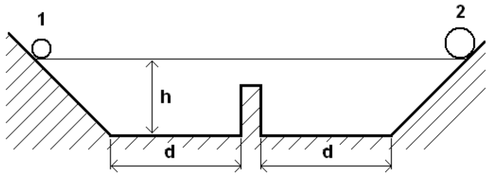
Ahora debemos estimar cuanto representa este cambio de volumen en altura del nivel del mar. Supongamos que la superficie de la Tierra es una esfera de radio R. La superficie de la misma es $4\pi R^2$. El radio de la Tierra es aproximadamente $6400\ km$, con lo cual la superficie es $5{,}1 \times 10^{14}\ m^2$. Dado que el mar cubre aproximadamente un $70\ \%$ de la superficie, tenemos que $S_{mar} = 3{,}6 \times 10^{14}\ m^2$. Por lo tanto, el cambio de altura será, aproximadamente:

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S_{mar}} = \frac{9{,}0 \times 10^9\ m^3}{3{,}6 \times 10^{14}\ m^2} = 2{,}5 \times 10^{-5}\ m = 25\ \mu m$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

Problema 21, Mecánica del cuerpo rígido

Dos cilindros homogéneos 1 y 2, de masas m_1 y m_2 y radios $r_1 = r$ y $r_2 = 2r$ respectivamente, parten del reposo desde una altura h sobre planos inclinados como los de la figura:



Luego de rodar por cada plano inclinado y recorrer una misma distancia horizontal d impactan contra la pared central. ¿Cuál de los cilindros tarda menos tiempo en arribar a la pared?

a) El cilindro 2 de radio $r_2 = 2r$.

b) El cilindro 1 de radio $r_1 = r$.

c) Cual tarde menos dependerá de la distancia d.

d) Cual tarde menos dependerá de la relación de masas m_1/m_2.

e) Ambos tardan el mismo tiempo.

Respuesta

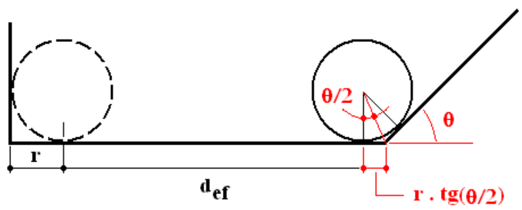
La energía cinética total (traslación + rotación) de cada cilindro está dada por:

$$K_i = 1/2\, m_i\, V_{cm,i}^2 + 1/2\, I_i\, \omega_i^2$$

donde I_i indica el momento de inercia del cilindro respecto de su eje axial, $I_i = 1/2\, m_i\, r_i^2$. Debido a la condición de rodadura, tenemos que $\omega_i = V_{cm,i}/r_i$. En consecuencia,

$$K_i = 3/4\, m_i\, V_{cm,i}^2$$

Por conservación de la energía ambos cilindros tendrán, a todo instante, la misma velocidad. Sin embargo, como indica la figura, el cilindro de mayor radio debe recorrer una distancia efectiva menor, debido a cuestiones exclusivamente geométricas: $d_{ef,2} = d - r_2[1 + \tan(\theta/2)]$.



Por lo tanto, dada la igualdad de velocidades, el cilindro 2 llegará antes. Así, la respuesta correcta es la (a).

Problema 22, Mecánica del punto

El sistema de la figura está pensado para poder regular la altura de la lámpara L (de masa m), por medio del contrapeso P. Si se coloca un contrapeso de masa m, ¿con qué aceleración se moverá el mismo?

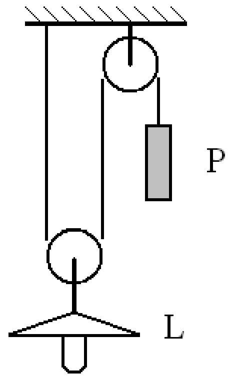
a) $1/5\ g$.

b) $1/3\ g$.

c) $2/5\ g$.

d) $2/3\ g$.

e) El sistema se mantiene quieto en equilibrio.



Respuesta

Fácilmente se obtiene que $2P = mg$ cuando el contrapeso P se encuentra colocado. Entonces, cuando se reemplace el mismo por una masa m, ésta tendrá una aceleración a hacia abajo (es un peso mayor que el contrapeso para el cual se diseño el sistema).

Planteando el diagrama de cuerpo libre para la masa que actúa de contrapeso (sentido positivo hacia abajo), se tiene que:

$$ma = mg - T$$

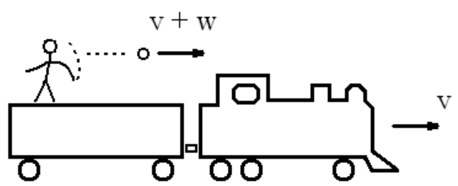
Planteando el diagrama de cuerpo libre para la lámpara (sentido positivo hacia arriba) y teniendo en cuenta que la aceleración de la misma será la mitad que la anterior, obtenemos:

$$2T - mg = ma/2$$

Despejando para T en ambas ecuaciones e igualando, llegamos a que $a = 2/5\ g$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (c).

Problema 23, Mecánica del punto

Un tren de pasajeros es movido por una locomotora a velocidad constante v. El pasajero de uno de sus vagones arroja una piedra en dirección horizontal en el sentido del movimiento del tren con velocidad w relativa al tren, el que continúa moviéndose con velocidad uniforme.
Cuando observamos la piedra desde la Tierra:



a) La energía cinética ganada por la piedra es $\frac{1}{2}mw^2$ y ha sido provista por el (esfuerzo muscular del) pasajero.

b) La energía cinética ganada por la piedra es $\frac{1}{2}mw^2 + mvw$ y está totalmente provista por el pasajero.

c) La energía cinética ganada por la piedra es $\frac{1}{2}mw^2 + mvw$ y está parcialmente provista por el pasajero.

d) La energía cinética ganada por la piedra es $\frac{1}{2}m(v+w)^2$ y está provista por el pasajero.

e) La energía cinética ganada por la piedra es $\frac{1}{2}m(v+w)^2$ y está provista por el pasajero y la locomotora en fracciones que no podemos conocer con los datos que poseemos.

Respuesta

Inicialmente, la energía cinética de la piedra, medida desde un inercial ubicado en la tierra, es:

$$E_i = 1/2\; m\; v^2$$

Luego de que el pasajero le imprimiera una nueva velocidad, la energía cinética de la piedra desde el mismo inercial es:

$$E_f = 1/2\; m\; (v+w)^2$$

En consecuencia, la energía cinética ganada por la piedra es:

$$\Delta E = 1/2\; m\; (v+w)^2 - 1/2\; m\; v^2 = 1/2\; m\; w^2 + m\; w\; v$$

Para saber de donde proviene la energía hacemos el siguiente experimento mental: supongamos que tenemos inicialmente al hombre y a la piedra en reposo (medidos desde un dado inercial). Ambos cuerpos interaccionan y la piedra gana una dada cantidad de energía cinética $1/2\; m\; w^2$. Esta ganancia de energía surge a expensas del pasajero. Ahora los medimos en iguales condiciones pero desde un inercial que se mueve con respecto a la situación inicial de los cuerpos (como en el problema). La nueva ganancia de energía es $1/2\; m\; w^2 + m\; v\; w$.

Claramente, todo este cambio de energía no proviene del pasajero (¿de donde proviene el resto?, Supongamos que aplicamos una fuerza F (invariante para los diferentes inerciales) para acelerar a la piedra, ¿durante cuanta distancia se aplica desde el primer inercial?, ¿y desde el segundo?).

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (c).

Problema 24, Electricidad y magnetismo

En el siguiente circuito:

donde

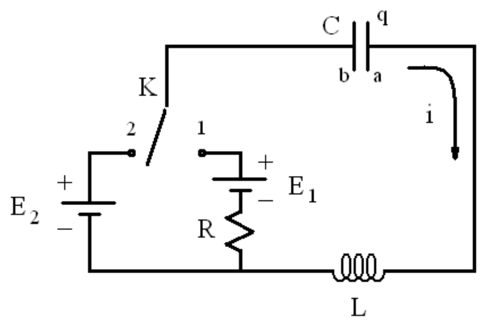
$L = 0{,}04\ h$

$E_1 = 15\ V$

$E_2 = 15\ V$

$R = 5\ \Omega$

$C = 4\ \mu F$



⇒ La llave K se encuentra en la posición 1 desde mucho tiempo atrás. En el instante $t = 0$ se cambia la posición de la llave K de 1 a 2.

⇒ Se observa el sistema a $t' = 0{,}0011\ s$. $q > 0$ significa que el potencial de b es positivo respecto de a. $i > 0$ significa que la corriente circula de b hacia a.

Indicar cuál de los valores de q e i se observan en el sistema.

a) $q = 286 \times 10^{-6}\ C$; $i = 0{,}173\ A$.

b) $q = 286 \times 10^{-6}\ C$; $i = -0{,}173\ A$.

c) $q = -286 \times 10^{-6}\ C$; $i = 0{,}173\ A$.

d) $q = 60 \times 10^{-6}\ C$; $i = 0\ A$.

e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Respuesta

La carga en el capacitor al momento de cambiar de posición la llave es:

$$q = C \cdot E_1 = 4 \times 10^{-6}\ F \cdot 15\ V = 60 \times 10^{-6}\ C$$

pues, una vez que se alcanza el estado asintótico (no hay corriente), toda la caída de potencial se produce allí.

Cuando se cambia de posición la llave de 1 a 2, la caída de potencial existente en el capacitor es exactamente igual al potencial entregado por la nueva fuente (15 V). En consecuencia, no circulará corriente alguna (y el capacitor seguirá cargado con la cantidad de carga que ya tenía).

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (d).

Problema 25, Óptica

Una doble rendija con un espaciamiento de $d = 0{,}48\ mm$ se ilumina con luz azul de Cadmio ($\lambda = 480\ nm$). ¿A qué distancia l de las rendijas se obtendrán franjas separadas $1\ mm$?

a) No pueden formarse franjas porque d es múltiplo de l.

b) Faltan datos para resolver el problema.

c) $l = 100\ cm$.

d) $l = 40\ cm$.

e) $l = 200\ cm$.

Respuesta

El experimento de la doble rendija o experimento de Young nos dice que las franjas brillantes satisfacen:

$$y_b = \frac{\lambda \cdot L}{d} \cdot m$$

donde:

λ: Longitud de onda.

L: Distancia entre la doble rendija y la pantalla donde se proyecta la interferencia.

d: Separación de las rendijas.

m: Número de orden de las franjas.

Por lo tanto, la separación entre dos franjas brillantes será:

$$Y = \frac{\lambda \cdot L}{d}$$

Despejando para la distancia L obtenemos:

$$L = \frac{d \cdot Y}{\lambda}$$

Numéricamente:

$$L = \frac{0{,}48 \times 10^{-3}\ m \cdot 1 \times 10^{-3}\ m}{480 \times 10^{-9}\ m} = 1\ m$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (c).

Problema 26, Óptica

Una boya esférica flota estática en el mar durante los primeros minutos del amanecer. La playa está al oeste de la boya. La sombra proyectada por la esfera es:

a) Un rectángulo de ancho igual al diámetro de la esfera y que se extiende desde la esfera hasta la playa. Esta sombra se observa sólo en la superficie del mar.

b) Un círculo con diámetro igual al diámetro de la boya que se encuentra en el fondo del mar. El ángulo que forman la sombra, la boya y la superficie del mar coincide con el ángulo límite de la interface agua-aire.

c) Los fenómenos de difracción e interferencia dominan la descripción de este problema y es muy complicado estimar la sombra producida por la boya.

d) La sombra se extiende en la superficie del mar como descripto en a). La sombra también forma una franja en el fondo del mar de ancho igual al diámetro de la boya que se extiende desde el ángulo límite (como descripto en b)) hasta la playa.

e) Ninguna de las anteriores.

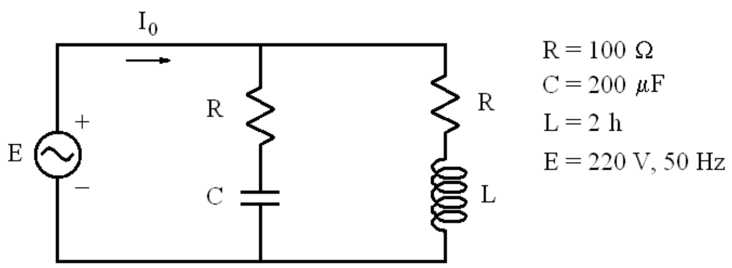
Respuesta

El fondo del mar (cuando la profundidad no es grande) se encuentra iluminado por los rayos dispersados en la atmósfera (provenientes de todos lados). Debido a la reflexión total interna, los rayos provenientes directamente del Sol no alcanzan el fondo del mar. En consecuencia, no puede existir una sombra en ese lugar. Asimismo, los rayos directos del Sol iluminan la superficie del mar. La esfera oculta esta reflexión en la zona detrás de la misma y, por lo tanto, genera una sombra sobre la superficie.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

Problema 27, Electricidad y magnetismo

En el circuito de la figura se verifica que:



a) $I_0 = 2{,}2\ A$ en fase con E.

b) $I_0 = 1{,}1\ A$ en fase con E.

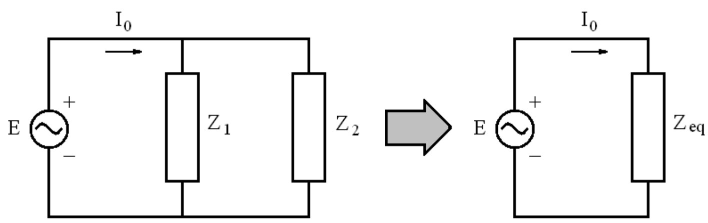
c) $I_0 = 1{,}1\ A$ atrasada en $\pi/2$ respecto a E.

d) $I_0 = 2{,}2\ A$ adelantada en $\pi/2$ respecto a E.

e) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Respuesta

En la siguiente figura mostramos el procedimiento a seguir:



La impedancia equivalente del circuito serie izquierdo, expresada en notación compleja, es:

$$Z_1 = R - \hat{\imath} \cdot \frac{1}{\omega C}$$

Asimismo, la impedancia equivalente del circuito serie derecho es:

$$Z_2 = R + \hat{\imath} \cdot \omega L$$

donde $\hat{\imath}$ indica el número imaginario puro. La combinación en paralelo de las anteriores impedancias es:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R - \hat{\imath}/\omega C} + \frac{1}{R + \hat{\imath}\omega L}$$

Operando algebraicamente obtenemos:

$$Z_{eq} = \frac{\omega(R^2C + L) + \hat{\imath}R(\omega^2 LC - 1)}{2\omega RC + \hat{\imath}(\omega^2 LC - 1)} = R \cdot \frac{\omega(RC + L/R) + \hat{\imath}(\omega^2 LC - 1)}{2\omega RC + \hat{\imath}(\omega^2 LC - 1)}$$

Debido a que los valores indicados para los elementos del circuito satisfacen que $RC = L/R$ o, equivalentemente, $R^2 = L/C$, el numerador y el denominador en la última expresión son iguales. Por lo tanto,

$$Z_{eq} = R = 100\ \Omega$$

La relación entre i_0 y E está dada por:

$$E = Z_{eq} \cdot i_0 \quad \Rightarrow \quad i_0 = E/Z_{eq} = 2{,}2\ A$$

Dado que la impedancia equivalente para relacionar E con i_0 es enteramente real (no tiene parte imaginaria), la corriente i_0 está en fase con E.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

Problema 28, Física

Un recinto previamente evacuado, como el de la figura, se llena con agua hasta los niveles que se indican. Las válvulas inferior y superior están inicialmente cerradas y se quiere nivelar el agua en los dos cilindros principales.

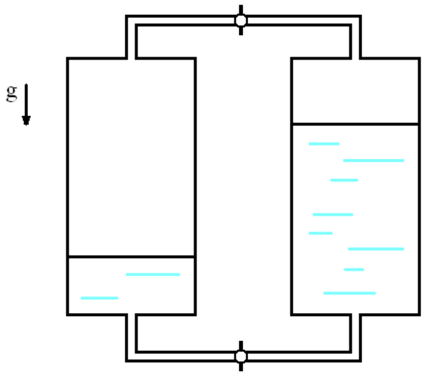
a) Esto se logra sólo si se abren las dos válvulas con un orden determinado.

b) Esto se logra sólo si se abren las dos válvulas e independientemente del orden en que se abran.

c) Esto se logra sólo si se abre la válvula inferior.

d) Esto se logra sólo si se abre la válvula superior.

e) Con cualquiera de las válvulas que se abra se logra nivelar el agua en los dos cilindros.



Respuesta

Inicialmente, ambos recintos se encuentran a la presión de saturación del agua a la temperatura que tengan los mismos (presión de vapor).

Esta presión es independiente del nivel del líquido y, por lo tanto, abriendo la válvula inferior se logra nivelar ambos recipientes. Esto es, al existir una diferencia de columnas de agua, se establece un flujo de un recipiente al otro; sin embargo, la presión del vapor se mantiene constante (siempre que se espere un tiempo hasta lograr el equilibrio entre fases) y, por lo tanto, el flujo seguirá mientras exista diferencia en las columnas de agua. El proceso continúa hasta que los niveles se igualan. Lo anterior no ocurre cuando los recintos se encuentran inicialmente a presión atmosférica, ¿por qué?.

Así, abriendo la válvula inferior (e independientemente de lo que se haga con la superior) se logra igualar los niveles y, por lo tanto, la respuesta correcta es la (c).

Problema 29, Hidrostática e hidrodinámica

Un caño de radio 2 cm que lleva agua se sostiene horizontalmente medio metro por encima del piso. El agua, con una densidad de 1000 kilogramos por metro cúbico, abandona el caño en el estremo y toca el piso a una distancia de 2 metros del caño, medidos a lo largo del piso. Si se desprecia la fricción con el aire, la masa de agua por unidad de tiempo descargada por el caño es aproximadamente:

a) $2\ kg/s$.

b) $4\ kg/s$.

c) $6\ kg/s$.

d) $8\ kg/s$.

e) $16\ kg/s$.

Respuesta

Luego de salir por el caño, cada elemento de agua se encuentra en caída libre. De la cinemática tenemos que:

$$\begin{aligned} x &= V_0 \cdot t \\ y &= h - 1/2 \cdot g \cdot t^2 \end{aligned}$$

Eliminando el tiempo y haciendo $x = x_p$ cuando $y = 0$ (llegada al piso) obtenemos:

$$V_0 = \sqrt{\frac{g \cdot x_p^2}{2 \cdot h}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ m/s^2 \cdot (2\ m)^2}{2 \cdot 0{,}5\ m}} = 6{,}26\ m/s$$

La masa de agua por unidad de tiempo que debe circular por el caño es:

$$\dot{m} = \rho \cdot V_0 \cdot A = \rho \cdot V_0 \cdot \pi r^2 = 1000\ kg/m^3 \cdot 6{,}26\ m/s \cdot \pi \cdot (0{,}02\ m)^2 = 7{,}87\ kg/s$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (d).

Problema 30, Electricidad

¿Cuál es la fuerza para separar dos esferas de Magdeburgo de radio R, si la presión atmosférica es P? (Las esferas de Magdeburgo son dos semiesferas apoyadas una contra la otra formando una esfera dentro de la cual se hace vacío).

a) $\pi R^2 P$.

b) $2\pi R^2 P$.

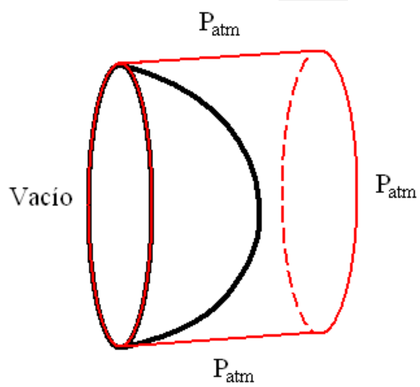
c) $4\pi R^2 P$.

d) $\pi R^2 P/2$.

e) $2\pi R^3 P/3$.

Respuesta

El estado de fuerzas puede analizarse en un volumen de control cilíndrico que contiene a una de las hemiesferas.



Dado que todo lo que se encuentra dentro de este volumen se halla en equilibrio, las fuerzas aplicadas sobre el mismo deben anularse entre sí (resultante nula).

El recubrimiento cilíndrico del volumen soporta una fuerza hacia el eje del cilindro, proveniente de la presión externa. Dada la simetría, la resultante es nula.

La cara derecha del cilindro soporta una fuerza $F = P \cdot A$ hacia la izquierda, proveniente de la presión externa (A es el área de la sección circular). Cuando las hemiesferas se encuentran unidas, la anterior fuerza queda equilibrada por una fuerza análoga proveniente de la otra hemiesfera (aplicada sobre la cara izquierda de la superficie que define el volumen de control). Cuando se busca separar las hemiesferas, el contacto entre ambas se pierde y, con ello, las fuerzas del vínculo. En este caso, la fuerza proveniente de la presión es equilibrada por la fuerza externa que se aplica para lograr la separación (en forma de tracción).

En consecuencia, la fuerza necesaria para separar las hemiesferas de Magdeburgo es:

$$F = P \cdot A = \pi\ R^2\ P$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

Examen de Matemática, 2000

Problema 1, Algebra lineal

El conjunto de soluciones reales de la ecuación: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 2 & 1 & x^2 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$ es:

a) vacío.

b) $\{0\}$.

c) $\{1\}$.

d) $\{1, -3\}$.

e) $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

Pista

Las barras indican determinante.

Respuesta

Desarrollamos el determinante que aparece en la expresión:

$$2 \cdot (3 - 7x^2) - 3 \cdot (6 - 6x^2) + x \cdot (14 - 6) = 0$$

Operando algebraicamente llegamos a la siguiente ecuación:

$$4x^2 + 8x - 12 = 0$$

La solución de la misma está dada por

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 16}}{2 \cdot 4} = -1 \pm 2$$

Así, el conjunto solución es $\{1, -3\}$ y la respuesta es la (d).

Problema 2, Cálculo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = \ldots$$

a) 0.

b) $e - 2$.

c) $e - 1$.

d) e.

e) $e + 1$.

Pista

Las propias respuestas dan una pista de cómo encarar este problema. ¿Cómo es el desarrollo de e^x alrededor de $x = 0$?

Respuesta

Sea la función $f(x) = e^x$. La derivada n-ésima de dicha función es la misma función, e^x. De esta manera, el desarrollo en series de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = 0$ es:

$$f(x) = e^x = e^0 + e^0 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot e^0 \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot e^0 \cdot x^3 + \ldots = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \ldots$$

En particular, evaluando la función en $x = 1$ obtenemos:

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot 1^2 + \frac{1}{3!} \cdot 1^3 + \ldots$$

Operando algebraicamente,

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 2$$

Así, la respuesta correcta es la (b).

Problema 3, Algebra lineal

¿Para qué valor de k la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ tiene un autovalor igual a 2?

a) -2.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

e) 3.

Respuesta

Los autovalores de una transformación lineal, representada por la matriz A, son aquellos escalares λ que satisfacen la ecuación $|A - \lambda I| = 0$, donde las barras indican determinante e I indica la matriz (transformación) identidad.

Desarrollando dicho determinante obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & k-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot(k-\lambda) + 1 = 0$$

La ecuación de autovalores anterior (en la variable λ) tiene dos soluciones. Por el mismo enunciado conocemos una de ellas. Reemplazando el autovalor pedido, $\lambda = 2$, obtenemos:

$$(k-2) + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k = 1$$

De esta manera, la respuesta correcta es la (c).

Problema 4, Cálculo

Un punto se desplaza sobre la curva formada por la intersección de la superficie $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ y el plano $y = cte.$
En $x = 3$ la componente v_x de la velocidad vale $9\ m/s$, el módulo de la velocidad en ese punto es aproximadamente:

a) $9\ m/s.$

b) $10{,}82\ m/s.$

c) $9{,}85\ m/s.$

d) No se puede calcular.

e) $6\ m/s.$

Respuesta

La curva de interés está definida como la intersección de dos superficies: un paraboloide y un plano. En particular, la curva satisface:

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \\ y = K \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad z = \frac{x^2}{9} + \frac{K^2}{4}$$

Esto es, la curva es una parábola, $z(x)$. La derivada de z con respecto a x nos da la pendiente de esta curva en cualquier punto:

$$z'(x) = \frac{2}{9}x$$

En el punto $x = 3$, la pendiente vale $z'(x = 3) = 2/3$.

La recta tangente está definida por el punto en sí y la anterior pendiente. Así, el vector directriz de esta recta tangente, a menos de un factor multiplicativo, es $(x, z) = (1, \frac{2}{3})$.

A su vez, sabemos que el vector velocidad es tangente a la curva; en consecuencia, debe tener la misma dirección que el anterior vector. Por proporcionalidad,

$$\frac{v_z}{v_x} = \frac{2/3}{1} \qquad \rightarrow \qquad v_z = \frac{2}{3}v_x$$

Numéricamente, $v_z = 2/3 \cdot 9\ m/s = 6\ m/s$. Entonces, el módulo de la velocidad es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{81 + 36}\ m/s = 10{,}82\ m/s$$

En consecuencia, la respuesta correcta es la (b).

Problema 5, Cálculo

La derivada de la función $u = xy^2 + yz^2$ en el punto $(1, 2, 1)$ en la dirección de la recta que pasa por dicho punto y por el $(2, 3, 3)$ es:

a) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{17}{\sqrt{6}}$.

b) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\sqrt{17}}{6}$.

c) $\frac{\partial u}{\partial r} = \sqrt{\frac{17}{6}}$.

d) $\frac{\partial u}{\partial r} = \sqrt{\frac{6}{17}}$.

e) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{6}{17}$.

Respuesta

La derivada direccional, $D_r u$, puede obtenerse a partir del gradiente de la función u, ∇u, y el versor que define dicha dirección, $\hat{r}$, según:

$$D_r u = \frac{\partial u}{\partial r} = \nabla u \cdot \hat{r}$$

Esta derivada es parcial en cuanto a que solo considera variaciones en la dirección analizada.

El gradiente de la función es:

$$\nabla u = (\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial u/\partial z) = (y^2, 2xy + z^2, 2yz)$$

El gradiente evaluado en el punto $(1, 2, 1)$ resulta:

$$\nabla u = (4, 5, 4)$$

El vector que une los puntos dados se obtiene como diferencia de los vectores posición:

$$v = (2, 3, 3) - (1, 2, 1) = (1, 1, 2)$$

Con lo cual el versor $\hat{r}$ resulta:

$$\hat{r} = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$$

Así, la derivada direccional es:

$$D_r u = (4, 5, 4) \cdot (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(4 + 5 + 8) = \frac{17}{\sqrt{6}}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

Problema 6, Cálculo

Si $x = x(t)$ e $y = y(t)$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2} =$

a) $\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3}$.

b) $\frac{\dot{y}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{y}}{(\dot{y})^3}$.

c) $\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{y})^3}$.

d) $\frac{\dot{y}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x})^3}$.

e) $\frac{\dot{y}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}\dot{x}^2}$.

Respuesta

Obtenemos la derivada primera, $\frac{dy}{dx}$, aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

Implícitamente se supuso que la función $x = x(t)$ es inyectiva; luego,

$$x = x(t) = x[t(x)] \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{dx} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = 1/\frac{dx}{dt}$$

Reemplazando,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Obtenemos la derivada segunda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d(\dot{y}/\dot{x})}{dx}$$

Aplicando diferenciación de un cociente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\frac{d\dot{y}}{dx} - \dot{y}\frac{d\dot{x}}{dx}}{(\dot{x})^2}$$

Aplicando nuevamente la regla de la cadena:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\frac{d\dot{y}}{dt}\frac{dt}{dx} - \dot{y}\frac{d\dot{x}}{dt}\frac{dt}{dx}}{(\dot{x})^2}$$

Reemplazando $\frac{dt}{dx}$ y la notación para las derivadas temporales:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y}/\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}/\dot{x}}{(\dot{x})^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}$$

De acuerdo a lo anterior, la respuesta correcta es la (a).

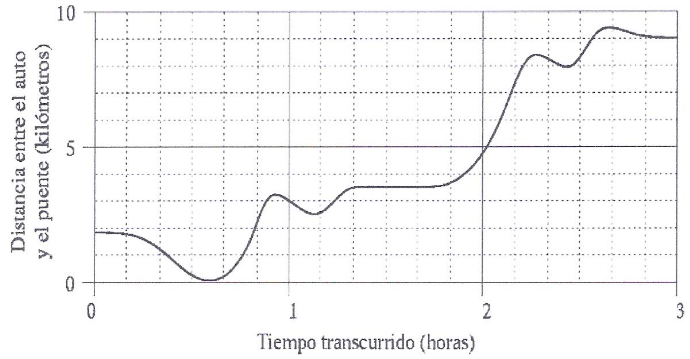
Problema 7, Cálculo

Un automóvil comienza un viaje a las 9:00 hs. Transita por una carretera perfectamente recta, y llega a destino al mediodía. Durante el viaje los siguientes eventos tienen lugar (no necesariamente en orden).

$\Rightarrow$ El automóvil se detiene y retrocede al menos una vez.

$\Rightarrow$ El automóvil cruza un puente situado entre los puntos extremos del viaje.

El siguiente gráfico muestra la distancia entre el automóvil y el puente en cada instante del viaje. En todo punto del gráfico la función tiene al menos derivada segunda definida.



¿Cuántas veces durante el viaje, el automóvil detuvo su movimiento hacia adelante, y luego, sin retroceder, continuó su camino?

a) Una.

b) Dos.

c) Tres.

d) Cuatro.

e) Ninguna.

Pista

¿Qué pasaría si supusiéramos que el automóvil comienza yendo hacia atrás y en determinado momento llega al puente (se hace cero la distancia), desde donde comienza a ir hacia adelante? En este caso, la gráfica mostrada sería equivalente al avance del automóvil con el punto de partida ubicado en $\approx 1{,}9$ km. Sin embargo, nos dicen que el automóvil *cruza* el puente. En consecuencia, la única posibilidad es que el automóvil arranque yendo hacia adelante y, por lo tanto, debemos tener presente que la función graficada no marca la distancia desde el punto de partida sino la distancia desde el puente que está en algún lugar intermedio entre los puntos extremos. Dado que la distancia es una función definida positiva, la medición desde el puente será positiva aún cuando se mida para atrás (hacia el punto de partida).

Respuesta

Lo primero que debemos hacer es identificar en el gráfico cuál es el momento en que el automóvil cruza el puente. Esto sucede cuando la distancia al puente (eje vertical) es cero; o sea, a las 9:35 hs. aproximadamente. Entonces vemos que, desde las 9:00 hs. hasta el momento en que cruza el puente, el automóvil avanza hacia adelante. Al llegar al puente detiene momentáneamente su marcha (la derivada se hace cero) y luego continúa avanzando.

Luego de cruzar el puente, el avance del automóvil hacia adelante queda especificado por una derivada positiva (en el gráfico mostrado) y el retroceso del mismo por una derivada negativa (antes de cruzar el puente, la situación es justamente al revés -para hacer este mismo análisis es necesario regraficar el primer tramo proyectando especularmente la curva respecto del eje del tiempo).

Asimismo, además del momento en que cruza el puente, existe solo una situación adicional en la que el automóvil viene avanzando hacia adelante (derivada positiva), detiene su marcha momentáneamente o por un lapso de tiempo finito (derivada nula en un punto o en un segmento) y, sin retroceder (sin que la derivada se haga negativa), continúa su marcha hacia adelante (continúa con derivada positiva).

Por lo tanto, la situación planteada sucede dos veces y la respuesta correcta es la (b).

Problema 8, Cálculo

Mismo enunciado que el del problema 7.
¿En cuál de los siguientes intervalos la velocidad del automóvil se estaba incrementando?

a) 9:50 - 10:00.

b) 10:30 - 10:40.

c) 10:50 - 11:00.

d) 11:10 - 11:20.

e) Ninguno de los anteriores.

Respuesta

Analizamos cada uno de los intervalos:

- 9:50-10:00 hs. - El automóvil va disminuyendo su velocidad hasta que se hace cero y luego comienza a ir hacia atrás (aumenta su velocidad en retroceso).
- 10:30-10:40 hs. - El automóvil se encuentra quieto.
- 10:50-11:00 hs. - El automóvil va incrementando su velocidad progresivamente (segunda derivada positiva).
- 11:10-11:20 hs - idem caso (a)

Claramente, el caso (c) satisface el enunciado y, por lo tanto, es la respuesta correcta.

Problema 9, Cálculo

Si f es la función cuyo gráfico se muestra en el enunciado del problema 7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para f', la derivada de f?

a) $f'(t) \neq 0$ para $2 < t < 2{,}5$.

b) El valor mínimo de $f'(t)$ es 0 para t entre 1 y 2.

c) $f'(t) < 0$ para $0{,}1 < t < 0{,}5$.

d) $f'(1{,}5) > 1$.

e) Ninguna de las anteriores.

Respuesta

En este caso nos interesa la función tal como se encuentra graficada. Analizamos cada una de las afirmaciones:

- $f'(t) \neq 0$ para $2 < t < 2{,}5$: Se observa que a $t \approx 2{,}25$ (correspondiente a la hora 11:15 aproximadamente) la derivada se hace cero. La afirmación es falsa.
- El valor mínimo de $f'(t)$ es 0 para t entre 1 y 2: Desde $t = 1$ hasta $t \approx 1{,}15$ la derivada es negativa, con lo cual el valor mínimo de la derivada en el tramo planteado no es 0. La afirmación es falsa.
- $f'(t) < 0$ para $0{,}1 < t < 0{,}5$: La derivada en el tramo planteado siempre es negativa. La afirmación es verdadera.
- $f'(1{,}5) > 1$: La derivada en el instante planteado es 0. La afirmación es falsa.

En consecuencia, la respuesta (c) es la correcta.

Problema 10, Cálculo

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{e^x - x - 1}$$

a) $-\infty$.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

e) $+\infty$.

Respuesta

Tanto el numerador como el denominador tienden a cero conforme x lo hace. Entonces, aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{e^x - x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}[(\sin x)^2]}{\frac{d}{dx}(e^x - x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{e^x - 1}$$

La indefinición continúa pero sigue siendo del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$, por lo que aplicamos nuevamente la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{e^x - x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(2 \sin x \cos x)}{\frac{d}{dx}(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x}{e^x}$$

El límite del lado derecho de la ecuación está definido y es igual a 2, por lo que el límite pedido debe ser igual a este valor. Así, la respuesta correcta es la (d).

Problema 11, Cálculo

Si $f(x) = x|x|$ para todo x real, entonces f es diferenciable para

a) Ningún número real.

b) Solo en 0.

c) Solo números positivos.

d) Solo números negativos.

e) Todos los números reales.

Respuesta

La función planteada es una parábola, con la parte correspondiente a los reales negativos reflejada respecto del eje x. El único posible punto conflictivo para la definición de diferenciabilidad de una función es el correspondiente a $x = 0$. Sin embargo, en este punto, el límite del cociente incremental tiende al mismo valor por ambos lados y, por lo tanto, su derivada está definida. Así, en todo el eje real existe la derivada (los puntos distintos de $x = 0$ claramente tienen derivada definida) y, en consecuencia, la función es diferenciable para todos los reales. De modo que la respuesta correcta es la (e).

Problema 12, Cálculo

Si $f(x)$ es una función diferenciable a todo orden que cumple $\frac{df(x)}{dx} = [f(x)]^2$, entonces la derivada n-ésima de $f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, es

a) $n\ [f(x)]^n$.

b) $n!\ [f(x)]^{n+1}$.

c) $(n+1)!\ [f(x)]^{n+1}$.

d) $(n+1)\ [f(x)]^n$.

e) $n\ [f(x)]^{2n}$.

Respuesta

Vamos a obtener las primeras derivadas y, a partir de ellas, inferir una expresión general.
Primera derivada:

$$\frac{df(x)}{dx} = [f(x)]^2$$

Segunda derivada:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\{[f(x)]^2\} = 2\ f(x)\ \frac{df(x)}{dx} = 2\ f(x)\ [f(x)]^2 = 2\ [f(x)]^3$$

Tercera derivada:

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d}{dx}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\{2\ [f(x)]^3\} = 6\ [f(x)]^2\ \frac{df(x)}{dx} = 6\ [f(x)]^2\ [f(x)]^2 = 6\ [f(x)]^4$$

Cuarta derivada:

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \frac{d}{dx}\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d}{dx}\{6\ [f(x)]^4\} = 24\ [f(x)]^3\ \frac{df(x)}{dx} = 24\ [f(x)]^3\ [f(x)]^2 = 24\ [f(x)]^5$$

En este punto ya estamos en condiciones de seleccionar la respuesta correcta. De acuerdo a las diferentes expresiones para las derivadas, la expresión general podría llegar a ser (la única de entre las respuestas correctas con alguna posibilidad):

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = n!\ [f(x)]^{n+1}$$

Lo probamos por inducción. El caso inicial de la inducción ya está demostrado pues la expresión propuesta satisface con seguridad hasta el caso $n = 4$. Asumiendo cierta la proposición para el caso n, analizamos la veracidad del caso $n+1$.

Sea $\frac{d^n f(x)}{dx^n} = n!\ [f(x)]^{n+1}$, entonces:

$$\frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx}\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d\{n!\ [f(x)]^{n+1}\}}{dx} = n!\ (n+1)\ [f(x)]^n\ \frac{df(x)}{dx} = (n+1)!\ [f(x)]^n\ [f(x)]^2$$

$$\frac{d^{(n+1)} f(x)}{dx^{(n+1)}} = (n+1)!\ [f(x)]^{(n+1)+1}$$

Siendo verdadero el caso n, el caso $n+1$ también lo es. Luego, por inducción, la expresión propuesta es cierta para todo n.

Así, hemos demostrado que la respuesta (b) es la correcta.

Problema 13, Cálculo

Sean p y q constantes. Si $f(x) = p\ \sin(x) + q\ x\ \cos(x) + x^2$ para todo x real y $f(2) = 3$, entonces $f(-2)$ es:

a) -3.

b) -1.

c) 1.

d) 5.

e) Falta información.

Pista

Debemos analizar la paridad de las diferentes componentes.

Respuesta

Analizamos la paridad de cada una de las funciones que se utilizan para definir a $f(x)$. Así:

$$\sin(a) = -\sin(-a)$$
$$\cos(a) = \cos(-a)$$
$$x^2 = (-x)^2$$

Evaluando la función en $x = -a$:

$$f(-a) = p\ \sin(-a) + q\ (-a)\ \cos(-a) + (-a)^2$$

Utilizando la paridad de las distintas funciones:

$$f(-a) = p\ [-\sin(a)] + q\ (-a) \cos(a) + a^2 = -p\ \sin(a) - q\ a \cos(a) + a^2$$

Sumando y restando a^2:

$$f(-a) = -p\ \sin(a) - q\ a \cos(a) - a^2 + a^2 + a^2 = -[p\ \sin(a) + q\ a \cos(a) + a^2] + 2a^2$$

El término entre corchetes es $f(a)$. Reemplazando,

$$f(-a) = -f(a) + 2a^2$$

Dado que $a = 2$, obtenemos que $f(-2) = -f(2) + 2(2)^2 = -3 + 8 = 5$. De este modo, la respuesta correcta es la (d).

Problema 14, Cálculo

Una solución de la ecuación $ix^2 - x + i = 0$ es:

a) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\, i$.

b) $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})\, i$.

c) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\, i$.

d) $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})\, i$.

e) Ninguna de las anteriores.

Pista

Una solución de la ecuación genera una identidad cuando se reemplaza en la misma.

Respuesta

Las soluciones de la ecuación son:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4i^2}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2i} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2i}$$

Multiplicando y dividiendo por i:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2i}\frac{i}{i} = \frac{(1 \pm \sqrt{5})i}{2(i^2)} = \frac{(1 \pm \sqrt{5})i}{-2} = (-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2})i$$

En consecuencia, una de las soluciones es $x = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})i$, la cual corresponde a la respuesta (d).

Problema 15, Cálculo

El conjunto de números complejos z que verifican $|\mathrm{Re}\ z| + |\mathrm{Im}\ z| \leq \sqrt{2}\ |z|$ (Re, Im: parte real e imaginaria) en el plano complejo es:

a) un círculo.

b) una elipse.

c) un semiplano.

d) todo el plano.

e) ninguno de los anteriores.

Respuesta

Escribimos $z = x + i\ y$. De este modo, Re $z = x$ e Im $z = y$, y lo planteado en el enunciado se traduce a:

$$|x| + |y| \leq \sqrt{2}\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

Dado que trabajamos con los módulos y el problema es simétrico respecto del origen, podemos mirar solo lo que ocurre en el primer cuadrante. Esto es:

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

Operando,

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &\leq 2(x^2 + y^2) \\ x^2 + y^2 + 2xy &\leq 2(x^2 + y^2) \\ 0 &\leq x^2 + y^2 - 2xy \\ 0 &\leq (x-y)^2 \end{aligned}$$

La última desigualdad se satisface para cualquier par de reales x, y. Por lo tanto, todo el cuadrante analizado satisface la desigualdad planteada y, en particular, la igualdad se obtiene en la recta identidad. El análisis en los otros cuadrantes es idéntico y la igualdad se cumplirá en las rectas $|x| = |y|$.

Un resultado equivalente se obtiene si se analiza la desigualdad con notación polar para el complejo z.

En consecuencia, todo el plano complejo satisface la desigualdad y la respuesta correcta es la (d).

Problema 16, Cálculo

El conjunto de números complejos z que verifican $|z-1|+|z+1| \leq 2$ en el plano complejo es:

a) un círculo.

b) una hipérbola.

c) un segmento.

d) un punto.

e) dos puntos.

Respuesta

Planteemos un caso simple. Sea el número complejo $z = i \cdot \delta$; esto es, un número ubicado sobre el eje imaginario. En este caso, la suma es:

$$|z-1|+|z+1| = |-1+i\cdot\delta| + |1+i\cdot\delta| = \sqrt{1+\delta^2} + \sqrt{1+\delta^2}$$

La suma anterior será igual a dos únicamente en el caso en que δ sea igual a 0. En cualquier otro caso, la suma será mayor que 2 y la desigualdad planteada no se cumplirá. Esto nos da el indicio de cómo debe ser la solución.

Sea el número complejo $z = x + i \cdot \delta$, donde $x \in [-1,1]$. La suma, en este caso, es:

$$|z-1|+|z+1| = |(x-1)+i\cdot\delta| + |(x+1)+i\cdot\delta| = \sqrt{(x-1)^2+\delta^2} + \sqrt{(x+1)^2+\delta^2}$$

y, dado que x está ubicado entre $[-1,1]$, se tiene que $|x-1|+|x+1| = 2$. Así, al igual que en el caso anterior, la suma será igual a 2 sólo si $\delta = 0$, pues:

$$|z-1|+|z+1| = |(x-1)| + |(x+1)| = 2$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad (en realidad sólo se puede cumplir la igualdad) es el segmento ubicado entre $[-1,1]$ y la respuesta correcta es la (c).

Problema 17, Geometría

¿Cuál de las siguientes superficies en $\Re^3$ está totalmente contenida dentro de alguna esfera?

a) $x^2 + y^2 = 1$.

b) $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy = 1$.

c) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x = 1$.

d) $x^2 + 2y + 3z = 1$.

e) ninguna de las anteriores.

Pista

La respuesta (a) inmersa en $\Re^3$, ¿está acotada?

En $\Re^3$, la ecuación representa una superficie cilíndrica de modo que no existe una esfera que la contenga.

Respuesta

En este ejercicio debemos darnos cuenta de que una superficie esférica o elipsoidal siempre se encuentra acotata por una superficie esférica puesto que, en su forma normal (esto es, una vez realizadas las traslaciones y rotaciones convenientes) suma términos todos positivos. Así, la imposición de que dicha suma sea igual a un dado número, a, hace que el lugar geométrico de los puntos esté definido dentro de la esfera con radio vector a (al no existir restas, no se cancelan magnitudes infinitamente lejanas).

De las respuestas dadas, la única con apariencia de superficie esférica o elipsoidal (esto es, los términos cuadráticos puros tienen signo positivo) es la respuesta (c). Probamos que es una superficie elipsoidal trasladada. Tenemos:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x = 1$$

El término lineal en x da cuenta de una traslación en dicha coordenada. Antes debemos completar cuadrados. Sumando y restando 1 obtenemos:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 1 - 1 = 1$$

Reordenando,

$$(x^2 - 2x + 1) + 2y^2 + z^2 - 1 = 1$$

El término entre paréntesis es el cuadrado de $(x - 1)$. Reemplazando y reordenando:

$$(x - 1)^2 + 2y^2 + z^2 = 2$$

Trasladando el eje de las x mediante la transformación $\tilde{x} = x - 1$ obtenemos:

$$\tilde{x}^2 + 2y^2 + z^2 = 2$$

Dividiendo ambos términos de la igualdad por 2 llegamos a:

$$\frac{\tilde{x}^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$$

El resultado anterior es la forma matemática de una superficie elipsoidal de semieje según $\tilde{x}$ igual a $\sqrt{2}$, semieje según y igual a 1, y semieje según z igual a $\sqrt{2}$.

Dado que obtuvimos una superficie elipsoidal, sabemos que la misma está acotada por al menos una superficie esférica (en realidad infinitas) centrada en el origen del sistema trasladado (y también en el sistema original). Por lo tanto, la respuesta correcta es la (c).

Problema 18, Algebra lineal

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $A \cdot B =$

a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 15 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$.

e) Ninguna de las anteriores.

Respuesta

Realizando la multiplicación de matrices obtenemos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \cdot 0 + 2 \cdot 2) & (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3) \\ (3 \cdot 0 + 4 \cdot 2) & (3 \cdot 1 + 4 \cdot 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).

Problema 19, Probabilidad

Se arroja un dado tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los resultados sea par?

a) $1/8$.

b) $1/3$.

c) $1/2$.

d) $2/3$.

e) $7/8$.

Respuesta

Si cualquiera de los factores (tirada de un dado) es par, entonces el producto es par. Esto es:

Dado_1	Dado_2	Dado_3		Producto	probabilidad
par	par	par	$\rightarrow$	par	$(1/2)^3 = 1/8$
par	par	impar	$\rightarrow$	par	$(1/2)^3 = 1/8$
par	impar	par	$\rightarrow$	par	$(1/2)^3 = 1/8$
par	impar	impar	$\rightarrow$	par	$(1/2)^3 = 1/8$
impar	par	par	$\rightarrow$	par	$(1/2)^3 = 1/8$
impar	par	impar	$\rightarrow$	par	$(1/2)^3 = 1/8$
impar	impar	par	$\rightarrow$	par	$(1/2)^3 = 1/8$
impar	impar	impar	$\rightarrow$	impar	$(1/2)^3 = 1/8$

De modo que existe un único suceso que da como resultado un producto impar (todos los dados salen con algún número impar). La probabilidad correspondiente es $1/8$ y, por lo tanto, la probabilidad de que el resultado sea par es $1-1/8 = 7/8$. De este modo, la respuesta correcta es la (e).

Problema 20, Probabilidad

Para aumentar la confiabilidad de un sistema se colocan 4 componentes cumpliendo la misma función. Cada uno de los componentes tiene una confiabilidad de 0.9. ¿Cuál será, aproximadamente, la confiabilidad del sistema con los 4 componentes en paralelo?

a) 0.9999.

b) 0.999.

c) 0.99.

d) 0.9.

e) 0.6.

Respuesta

La probabilidad de falla de cualquiera de los componentes es 0.1. A partir de esto debemos hallar cuál es la probabilidad de falla de todo el sistema.

Bajo la hipótesis de que cada componente falla independientemente del otro (esto no tiene en cuenta lo que usualmente se conoce como la probabilidad de falla de modo común), la falla del sistema únicamente se produce por la falla simultánea de todos los componentes. Esto se debe a que, en un circuito conectado en paralelo, el sistema falla cuando fallan todas y cada una de las ramas. Dada la hipótesis de independencia, esta probabilidad es simplemente el producto de la probabilidad de falla de cada uno de los componentes. O sea:

$$p(\{\text{falla, sistema}\}) = p(\{\text{falla,1}\} \wedge \{\text{falla,2}\} \wedge \{\text{falla,3}\} \wedge \{\text{falla,4}\})$$

$$p(\{\text{falla, sistema}\}) = p(\{\text{falla,1}\}) \cdot p(\{\text{falla,2}\}) \cdot p(\{\text{falla,3}\}) \cdot p(\{\text{falla,4}\})$$

$$p(\{\text{falla, sistema}\}) = p(\{\text{falla,comp}\})^4 = 0.1^4 = 0.0001$$

Luego, la confiabilidad del sistema es $1 - p(\{\text{falla,sist}\}) = 0.9999$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la (a).