Instituto
Balseiro

# SELECCIÓN

# INSTITUTO BALSEIRO

2003

# MATEMÁTICA

Instituto
Balseiro

SELECCIÓN INSTITUTO BALSEIRO - 2003
MATEMÁTICA
INSTRUCCIONES

Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, 3 carillas con 15 problemas de Matemática. Aparte Usted ha recibido una hoja de respuestas.

- Cuente las páginas y verifique que estén todas bien impresas.
- Escriba su nombre en la hoja de respuestas y firme al pie. Escriba también un número de teléfono al cual podamos comunicarle durante el fin de semana si fue preseleccionado para la entrevista.
- El cuadernillo adjunto contiene 15 preguntas que Usted deberá contestar marcando en la hoja de respuestas **con una cruz (no con un círculo)** aquella letra que indique la alternativa válida, de la siguiente forma:

  12. a b c ~~d~~ e

  Usted puede quedarse con el cuadernillo de preguntas, así que le conviene marcar la respuesta elegida también en él, para su control.
- Se le asignará un punto a cada pregunta contestada correctamente. Se le asignará cero punto a cada pregunta mal contestada, con más de una respuesta o no contestada. Por lo tanto se recomienda no dejar preguntas sin contestar.
- Tiene Usted a su disposición una hora para terminar el examen. Esto representa 4 minutos para cada pregunta. Trate de no demorarse demasiado en preguntas que le resulten difíciles. Conteste en primer lugar las que le resulten más fáciles y deje las otras para el final.

¡¡¡ BUENA SUERTE !!!

Instituto Balseiro: Teléfono: (02944) 44 5131/5163 - FAX: (02944)-445102
San Carlos de Bariloche - Río Negro

1. ¿Cuál es la probabilidad de que, al arrojar dos dados, el producto de los dos puntajes resulte un número par?

   *a*) 1/3. *b*) 1/2. *c*) 2/3. *d*) 3/4. *e*) 5/6.

---

2. En el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + \alpha y + 4z = 1 \\ -x - \alpha y + \alpha z = \beta \end{cases}$$

   $\alpha$ y $\beta$ son constantes reales. ¿Para cuál de los siguientes casos no existe solución?

   *a*) $\alpha = 3$ , $\beta = 1$ *c*) $\alpha = 0$ , $\beta = 1$ *e*) $\alpha = 2$ , $\beta = -2$
   *b*) $\alpha = -3$ , $\beta = 0$ *d*) $\alpha = 1$ , $\beta = 0$

---

3. Una curva espacial $\mathcal{C}$ está definida por las ecuaciones:

$$x^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1 \,, \quad z = 4 \,.$$

   Entonces la integral de línea:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

   ($\times \equiv$ producto vectorial) resulta igual a:

   *a*) 0. *c*) $2\pi(\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}})$. *e*) $4\pi\hat{\mathbf{z}}$.
   *b*) $\pi^2/2\,(\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}})$. *d*) $16\pi\hat{\mathbf{z}}$.

---

4. Sean las rectas $r_1$ y $r_2$ definidas por:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \qquad r_2 : x - 2 = y - 1 = \frac{z-4}{\alpha}$$

   $r_1$ y $r_2$ son perpendiculares:

   *a*) Cuando $\alpha = 1$. *c*) Cuando $\alpha = 4$. *e*) Para todo $\alpha$.
   *b*) Cuando $\alpha = -1$. *d*) Cuando $\alpha = 5$.

---

5. Sea $f(x)$ la función definida para todo $x \neq 0$ como

$$f(x) = \int_{ax}^{bx} dy\, \frac{\tanh y\ \tan^2 y}{y^4}$$

   donde $a$ y $b$ son números reales y positivos. Entonces el límite cuando $x \to 0^+$ de $f(x)$ es:

   *a*) 0. *b*) $+\infty$. *c*) Indeterminado. *d*) $\ln(b/a)$. *e*) $\arctan(b/a)$.

6. En el plano complejo $z$ se define la transformación $w = \exp z$. ¿Cuál es la imagen ante esta transformación de la región $|\mathrm{Re}(z)| \leq 1$?

   *a*) Un semiplano.
   *b*) Un sector circular.
   *c*) Una corona circular.
   *d*) Un círculo.
   *e*) Ninguna de las anteriores.

---

7. Un campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ se define como: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})\ \mathbf{w}(\mathbf{r})$ donde $\varphi$ es el campo escalar: $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2$, mientras que $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ es el campo vectorial $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = (yz, zx, xy)$. Entonces, el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie exterior del cubo $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ es:

   *a*) 1. *b*) 1/8. *c*) 4/3. *d*) 0. *e*) Ninguno de los anteriores.

---

8. ¿Cuál es la distancia mínima entre el punto de coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y el conjunto de los puntos del espacio que satisfacen la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

   *a*) 2. *b*) 1. *c*) $\sqrt{2}$. *d*) $\sqrt{3}$. *e*) Ninguna de las anteriores.

---

9. Considere la integral de línea en el plano:

$$I_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} (dxP + dyQ)$$

donde $\mathcal{C}$ es una curva cerrada que limita un recinto de área $\mathcal{A}$. Determine en cuál de los siguientes casos $I_{\mathcal{C}} = \mathcal{A}$:

   *a*) $P = \cos x + 2xy - y\,,\ \ Q = x^2 + y^2 - \operatorname{sen} y\ .$
   *b*) $P = y\,,\ \ Q = x\ .$
   *c*) $P = x\,,\ \ Q = y\ .$
   *d*) $P = x^2\,,\ \ Q = y^2\ .$
   *e*) $P = y^2\,,\ \ Q = x^2\ .$

---

10.

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} =$$

   *a*) 0. *b*) $\sqrt{2}$. *c*) 1. *d*) $1/\sqrt{2}$. *e*) No existe.

11. Tenemos un cuadrado de cartón de lado $a$. Queremos hacer con él una caja sin tapa, quitando un cuadrado de cada esquina y plegándolo. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados para que la caja tenga el máximo volumen posible?

    *a*) $a/2$. *b*) $\sqrt{3}a$. *c*) $\sqrt{3}/4\,a$. *d*) 0. *e*) $a/6$.

---

12. La parte real de $z = i^{i^i}$ es ...

    *a*) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. *b*) $e^{\pi}$. *c*) $-\pi$. *d*) $\ln \frac{\pi}{2}$. *e*) 0.

---

13. Un jurado, compuesto por tres expertos, es contratado para opinar sobre la autenticidad de obras de arte. Luego de examinar cada ítem, cada experto vota (por "auténtico" o "falso"), y el dictamen del jurado se decide por mayoría. Dos de los expertos hacen su trabajo seriamente: cuando votan, lo hacen independientemente, y con una probabilidad $p$ (la misma para ambos) de tomar la decisión correcta. El tercer experto, en cambio, antes de cada voto arroja una moneda y según el resultado sea cara o seca vota por auténtico o falso. ¿Cuál es la probabilidad de que una decisión del jurado sea acertada?

    *a*) $\frac{1}{2}$. *b*) $p$. *c*) $p^2$. *d*) $\frac{p^2}{2}$. *e*) $\frac{p(1-p)}{2}$.

---

14. La condición de que en cada uno de los puntos de una curva en el plano su pendiente sea igual al doble de la suma de las coordenadas del punto define:

    *a*) Una familia de hipérbolas.
    *b*) Una única circunferencia.
    *c*) Una familia de parábolas.
    *d*) Una parábola que pasa por el origen.
    *e*) Ninguna de las opciones anteriores.

---

15. En el conjunto de los puntos del plano que verifican la ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 = 3\,,$$

el punto donde la coordenada $x$ alcanza su valor máximo es:

*a*) $x = -2$, $y = -1$.
*b*) $x = 2$, $y = 1$.
*c*) $x = 0$, $y = \sqrt{3}$.
*d*) $x = \sqrt{3}$, $y = 0$.
*e*) Ninguno de los anteriores.

# Selección Instituto Balseiro - 2003

## Hoja de respuestas

## Matemática

| Nombre: |
|---|
| Dirección y Teléfono: |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | a | b | c | d | e | 6. | a | b | c | d | e | 11. | a | b | c | d | e |
| 2. | a | b | c | d | e | 7. | a | b | c | d | e | 12. | a | b | c | d | e |
| 3. | a | b | c | d | e | 8. | a | b | c | d | e | 13. | a | b | c | d | e |
| 4. | a | b | c | d | e | 9. | a | b | c | d | e | 14. | a | b | c | d | e |
| 5. | a | b | c | d | e | 10. | a | b | c | d | e | 15. | a | b | c | d | e |