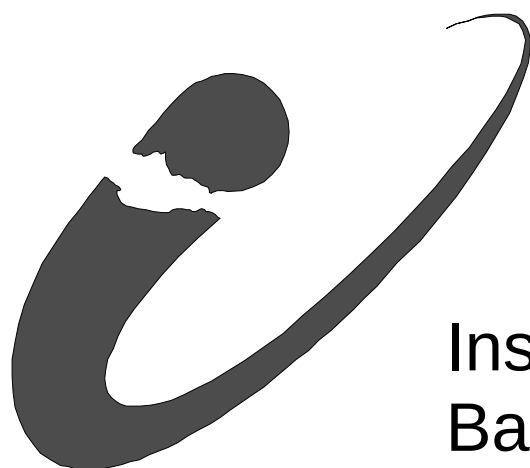




Instituto
Balseiro

SELECCIÓN
INSTITUTO BALSEIRO

2002

MATEMÁTICA



Instituto
Balseiro

SELECCIÓN INSTITUTO BALSEIRO - 2002
MATEMÁTICA
INSTRUCCIONES

Este cuadernillo contiene, además de esta hoja de instrucciones, 4 carillas con 20 problemas de Matemática. Aparte usted ha recibido una hoja de respuestas.

- Cuento las páginas y verifique que estén todas bien impresas.
- Escriba su nombre en la hoja de respuestas y firme al pie. Escriba también un número de teléfono al cual podamos comunicarle durante el fin de semana si fue preseleccionado para la entrevista.
- El cuadernillo adjunto contiene 20 preguntas que usted deberá contestar marcando en la hoja de respuestas **con una cruz (no con un círculo)** aquella letra que indique la alternativa válida, de la siguiente forma:

12. a b c ☒ e

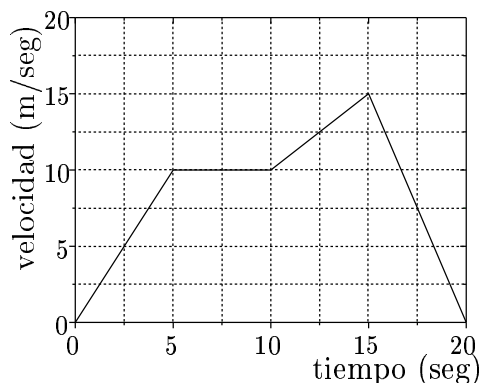
Usted puede quedarse con el cuadernillo de preguntas, así que le conviene marcar la respuesta elegida también en él, para su control.

- Se le asignará un punto a cada pregunta contestada correctamente. Se le asignará cero punto a cada pregunta mal contestada, con más de una respuesta o no contestada. Por lo tanto se recomienda no dejar preguntas sin contestar.
- Tiene Usted a su disposición una hora y 20 minutos para terminar el examen. Esto representa 4 minutos para cada pregunta. Trate de no trabarse en preguntas que le resulten difíciles. Conteste en primer lugar las que le resulten más fáciles y deje a las otras para el final.

!!! BUENA SUERTE !!!

1. La gráfica muestra la velocidad de un esquiador en función del tiempo al bajar el Cerro Catedral en Bariloche. ¿Qué distancia recorrió este esquiador en los primeros 10 segundos?

- (a) 5 m.
(b) 10 m.
(c) 50 m.
(d) 75 m.
(e) 100 m.



2. En el plano x, y , la ecuación $y = +\sqrt{x^2 + y^2}$ representa:

- (a) La porción negativa del eje y .
(b) La porción positiva del eje y .
(c) Una circunferencia de radio 1 centrada en $(0, 1/2)$.
(d) El eje x .
(e) El eje y .

3. Sea $f(x, y)$ una función con derivadas segundas continuas en un dominio $U \subset \mathbb{R}^2$. Se define $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, donde $x = u + \ln v$, e $y = u - \ln v$.

Entonces, $v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \dots$

- (a) $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
(b) $-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
(c) $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
(d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
(e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

4. Considere la ecuación: $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz 2×2 , y $\mathbf{0}$ denota a la matriz nula 2×2 . ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?

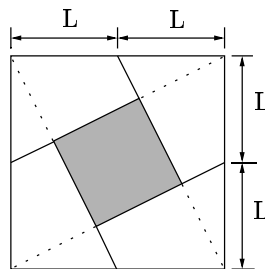
- (a) Ninguna.
(b) Una.
(c) Dos.
(d) Tres.
(e) Infinitas.

5. Las soluciones de la ecuación $|z - 1| \cdot |z - 1| = 1$ para $z \in \mathbb{C}$ determinan en el plano complejo:

- (a) un punto.
(b) dos puntos.
(c) una recta.
(d) una circunferencia centrada en el origen.
(e) ninguno de los anteriores.

6. ¿Cuál es el área de la región sombreada en la figura?

- (a) $0.6 L^2$.
- (b) $0.7 L^2$.
- (c) $0.8 L^2$.
- (d) $0.9 L^2$.
- (e) L^2 .



7. Si definimos la sucesión $T(n) = n(n+1)/2$ y la sucesión $S(n) = n^2$, donde n es un número natural incluido el cero. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

- (a) $T(n+1) = T(n) + n + 1$.
- (b) $S(n+1) = S(n) + 2n + 1$.
- (c) $S(n+1) = T(n+1) + T(n)$.
- (d) $S(n+1) = S(n) + T(n) + 2$.
- (e) $S(n) = 2T(n) - n$.

8. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$

y sean g_1 y g_2 las funciones definidas por: $g_1(x) = xf(x)$ y $g_2(x) = x^2f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Entonces:

- (a) g_1 y g_2 son continuas en $\mathbb{R}$.
- (b) g_1 es continua en $\mathbb{R}$ y g_2 es continua en $x = 0$.
- (c) ni g_1 ni g_2 son diferenciables en $x = 0$.
- (d) g_1 es continua sólo en $x = 0$ y g_2 es diferenciable sólo en $x = 0$.
- (e) g_1 es continua sólo en $x = 0$ y g_2 es diferenciable en $\mathbb{R}$.

9. Sea $F(x, y, z)$ una función de tres variables reales, diferenciable en un dominio $U \subset \mathbb{R}^3$. Para todos los puntos $(x, y, z) \in U$ tales que se verifique $F(x, y, z) = 0$ y también $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, resulta que: $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \dots$

- (a) -2 .
- (b) -1 .
- (c) 0 .
- (d) 1 .
- (e) 2 .

10. Sea $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$. Entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ es:

- (a) 0 .
- (b) 1 .
- (c) $-\frac{1}{8}$.
- (d) $+\frac{3}{8}$.
- (e) ∞ .

11. ¿Cómo distribuiría 60 bolillas blancas y 60 bolillas negras en dos cajas, de manera que poniendo 60 bolillas en total en cada caja, sea máxima la probabilidad de sacar dos bolillas blancas, extrayendo al azar una de cada caja?

- (a) Existen varias soluciones.
 (b) 59 blancas y 1 negra en una y el resto en la otra.
 (c) 30 blancas y 30 negras en una y el resto en la otra.
 (d) 20 blancas y 40 negras en una y el resto en la otra.
 (e) Existe una solución, y no es ninguna de las mencionadas.
-

12. ¿Tiene la función $f(x, y, z) = xyz$ un máximo sobre el plano definido por la ecuación: $x + 2y + 2z = 108$?

- (a) Sí, y está en $x = 36, y = 18, z = 18$.
 (b) Sí, y está en $x = 32, y = 20, z = 18$.
 (c) No.
 (d) Sí, pero no es ninguno de los mencionados.
 (e) No puede decirse en base a la información dada.
-

13. Si $\bar{z}$ es el complejo conjugado de z , la ecuación: $z^2 + \bar{z}^2 = 0$ se verifica para ...

- (a) todo $z \in \mathbb{C}$.
 (b) todo z puramente real.
 (c) todo z puramente imaginario.
 (d) todo z de módulo menor que 1.
 (e) ninguno de los anteriores.
-

14. Sea la integral definida: $I = \int_0^a dx f(x)$. Se define:

$$J = \int_0^a f(x) \left[\int_0^x f(y) \left(\int_0^y f(z) dz \right) dy \right] dx .$$

Entonces:

- (a) $J = I^3$.
 (b) $J = \frac{1}{3}I^3$.
 (c) $J = \frac{1}{6}I^3$.
 (d) $J = I$.
 (e) $J = 3I$.
-

15. Cuatro hombres, cuyas casas están construídas alrededor de una plaza, concurren una noche a una fiesta en el centro de dicha plaza. Al final de la celebración, cada uno de ellos va tambaleándose a una de las casas, sin que dos de ellos vayan a la misma. ¿Cuál es la probabilidad de que cada uno de los hombres llegue a su propia casa?

- (a) 1. (b) 1/2. (c) 1/4. (d) 1/16. (e) 1/24.

16. ¿Cuál es el supremo de la función $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ para x positivo?

- (a) 4. (b) ∞ . (c) -2 . (d) 2. (e) 0.
-

17. ¿Cuál es la intersección entre $x^2 - \frac{y^2}{100} + z^2 = -1$ y $x^2 + y^2 + z^2 - 12y + 11 = 0$?

- (a) Una circunferencia. (c) Una parábola. (e) Ninguna de las anteriores.
 (b) Dos puntos. (d) Una curva alabeada.
-

18. Sea $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ un campo vectorial en el espacio, definido por: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{b} \times \mathbf{r}$, donde $\mathbf{b} = (1, 2, 2)$ es un vector constante, y $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Entonces, la circulación de $\mathbf{v}$, $\oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}$, a lo largo de la curva $(\cos(t), \sin(t), 0)$, con $t \in [0, 2\pi)$ resulta:

- (a) 0. (c) 2π . (e) Ninguno de los anteriores.
 (b) π . (d) π^2 .
-

19. Una curva regular en el espacio está definida paramétricamente por $t \mapsto \mathbf{r}(t)$. Con la notación: $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$, $\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}/dt^2$, etc. Si $\mathbf{r}(t)$ describe una línea recta infinita, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

- (a) $\exists t / \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \neq 0$. (c) $(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) = 0, \forall t$. (e) $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = 0, \forall t$.
 (b) $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0, \forall t$. (d) $\dot{\mathbf{r}} \cdot (\ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) = 0, \forall t$.
-

20. Sea $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ definido como: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (0, 0, z)$.

El flujo $\oint_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$ del campo $\mathbf{v}$ sobre la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es ...

- (a) 0. (b) π . (c) $\frac{4\pi}{3}$. (d) 2π . (e) 4π .

Selección Instituto Balseiro - 2002

Hoja de respuestas

Matemática

Nombre:
Dirección y Tel.:

1. a b c d e

2. a b c d e

3. a b c d e

4. a b c d e

5. a b c d e

6. a b c d e

7. a b c d e

8. a b c d e

9. a b c d e

10. a b c d e

11. a b c d e

12. a b c d e

13. a b c d e

14. a b c d e

15. a b c d e

16. a b c d e

17. a b c d e

18. a b c d e

19. a b c d e

20. a b c d e