1. Sea $\lfloor x \rfloor$ el mayor entero que es menor o igual a x y $\lceil x \rceil$ el menor entero que es mayor o igual a x. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones deben ser ciertas?

   (i) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ si y sólo si x es un entero.

   (ii) $\lfloor x \rfloor + 1 = \lceil x \rceil$ si y sólo si x no es un entero.

   (iii) $\lfloor x \rfloor \lceil y \rceil = \lceil x \rceil \lfloor y \rfloor$ para cualesquiera x, y.

   (iv) $-\lfloor x \rfloor = \lceil -x \rceil$ para cualquier x.

   (a) Sólo (iv). (b) Sólo (i) y (iv). (c) Sólo (i), (ii) y (iii). (d) Sólo (i), (ii) y (iv). (e) (i), (ii), (iii) y (iv).

---

2. La integral: $\int_0^1 dx \left[\int_{x^2}^1 dy f(x,y)\right]$, expresada como otra integral con el orden de las integraciones sobre x e y invertido, resulta:

   (a) $\int_0^1 dy \left[\int_{y^2}^1 dx f(x,y)\right]$.

   (b) $\int_0^1 dy \sqrt{y} \left[\int_0^1 dx f(x,y)\right]$.

   (c) $\int_0^1 dy \left[\int_1^{y^2} dx f(x,y)\right]$.

   (d) $\int_0^1 dy \sqrt{y} \left[\int_0^{\sqrt{y}} dx f(x,y)\right]$.

   (e) $\int_0^1 dy \left[\int_0^{\sqrt{y}} dx f(x,y)\right]$.

---

3. Una sucesión de números reales $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ se define por recurrencia, de modo que $s_{n+1} = \frac{C}{1+s_n}$, donde C es una constante positiva y $s_1 \geq 0$. Entonces,

   (a) La sucesión es monótona y convergente.

   (b) La sucesión es convergente, pero no es monótona.

   (c) La convergencia de la sucesión depende del valor de s_1.

   (d) La convergencia de la sucesión depende del valor de C.

   (e) La sucesión es divergente.

---

4. Se sabe que $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$. ¿Cuál es el valor de la siguiente expresión?

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (1+x)^2\, e^{-x^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2}}$$

   (a) 1. (b) $\frac{2}{3}$. (c) $\frac{3}{2}$. (d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (e) $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

---

5. Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 2 negras. Se escoje una al azar, se la devuelve a la bolsa, y se escoje otra, también al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas resulten del mismo color?

   (a) 1/3. (b) 2/9. (c) 2/3. (d) 5/9. (e) 5/12.

---

6. Se define una nueva operación de "multiplicación" $\triangle$ entre números complejos, de modo tal que a cada par de complejos $z = (x, y)$, $w = (u, v)$ se le asigna el complejo $z \triangle w$, definido como: $z \triangle w = (xu + yv, xv - yu)$

   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   (a) La operación coincide con la multiplicación usual entre complejos.

   (b) No existe η tal que $\eta \triangle z = z$, para todo z.

   (c) $(0,1) \triangle (0,1) = (-1,0)$.

   (d) La operación no es conmutativa.

   (e) La operación no se reduce a la multiplicación entre reales cuando las partes imaginarias son nulas.

---

7. La función $\vec{r}(t)$ representa una curva en el espacio. Es derivable en el intervalo de definición del parámetro $t \in [t_0, t_1]$. Indique cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones pueden describir segmentos de recta.

   (i) $\dot{\vec{r}} = \vec{0}$.

   (ii) $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$.

   (iii) $(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{r}} = \vec{0}$.

   (iv) $\dot{\vec{r}} = c\,(\vec{r} - \vec{r}_0)$, $c > 0$.

   (donde $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ y $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$)

   (a) Sólo (i).

   (b) Sólo (ii).

   (c) Sólo (iv).

   (d) (ii) y (iii).

   (e) (iii) y (iv).

---

8. El resultado de evaluar la integral de línea: $I = \oint (Pdx + Qdy)$, con $P = x^3 + 2xy + y^2 + y^3$ y $Q = 3xy^2 + 2xy + y^3$, a lo largo de una circunferencia de radio 1 contenida en el plano xy y centrada en el origen es:

   (a) 2π, si la curva se recorre en sentido antihorario.

   (b) -2π, si la curva se recorre en sentido horario.

   (c) 0.

   (d) 2.

   (e) $2xy$.

---

9. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, indicar cuál de las siguientes ecuaciones es *falsa*:

   (a) $A^2 = 0$.

   (b) $B^2 = 0$.

   (c) $(A - B)^2 = 0$.

   (d) $(A + B)^2 = C$.

   (e) $(A + B + C)^2 = 2(A + B + C)$.

---

10. El límite de la función $f(x) = \frac{a}{x} - \operatorname{cotg}(\frac{x}{a})$, con $a \neq 0$, cuando $x \to 0$ es:

    (a) $+\infty$.

    (b) $-\infty$.

    (c) 0.

    (d) 1.

    (e) $\frac{\pi}{a}$.

---

11. Una lancha que navega uniendo dos puntos A y B situados en sendas márgenes de un río, tarda 2 horas en cumplir el recorrido (independientemente de que el sentido sea desde A hacia B o de B hacia A). Al tiempo t_0 parte una lancha desde A hacia B, retornando desde B hacia A, y así sucesivamente (considere que la velocidad es constante, y desprecie el tiempo que tarda en girar). Separadas por un intervalo de una hora, parten 2 lanchas más (desde A), haciendo idéntico recorrido.

    ¿Cuántos encuentros entre lanchas se producen al cabo de 6 horas (contadas desde t_0)?

    (a) 0. (b) 1. (c) 4. (d) 5. (e) 6.

---

12. La posición x de una partícula que se mueve en una dimensión está dada por la función:

$$x(t) = C\,(t+2T)(t+T)t(t-T)(t-2T)$$

    t: tiempo, C y T: constantes positivas. Entonces la partícula tiene aceleración nula y velocidad positiva en ...

    (a) 4 instantes. (b) 3 instantes. (c) 2 instantes. (d) 1 instante. (e) Nunca.

---

13. Sea $\mathbf{A}$ la matriz cuadrada: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ -y & 0 & -x \\ -z & x & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{Tr}(\mathbf{M}) = m_{11} + m_{22} + m_{33}$, la suma de los elementos diagonales de una matriz. Indique cuál de las siguientes ecuaciones tiene como espacio solución (para x, y, z) una superficie esférica de radio 1:

    (a) $\det \mathbf{A} = 0$.
    (b) $\det \mathbf{A} = 1$.
    (c) $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = 0$.
    (d) $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}^2) = -2$.
    (e) $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}^2) = 1$.

---

14. w es un número complejo fijo tal que $\mathrm{Re}(w^2) = 0$. Entonces, en el plano complejo z, la ecuación $\mathrm{Re}[(z+w)(z-w)] = 0$ describe:

    (a) Un círculo.
    (b) Una elipse.
    (c) Un punto.
    (d) Una recta.
    (e) Dos rectas.

---

15. ¿Cuál es el máximo de la función $f(x,y,z) = \sqrt{3}(x-y+z)$ sobre la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=1$?

    (a) 1. (b) 3. (c) 4. (d) 7. (e) 10.

---

16. Dados un cilindro: $x^2 + y^2 = a^2$ y un elipsoide de semiejes b, c y d, con $0 < b \leq c \leq d < \infty$, la intersección de ambas figuras puede ser:

(i) Un punto.	(v) Un segmento.
(ii) Dos puntos.	(vi) Dos segmentos.
(iii) Una circunferencia.	(vii) Una curva alabeada (no contenida en ningún plano).
(iv) Dos Circunferencias.	(viii) Dos curvas alabeadas.

(a) Sólo (i), (iii), (v) ó (vii).
(b) Sólo (ii), (iv), (vi) ó (viii).
(c) Cualquiera de las ocho opciones.
(d) Sólo (iii), (iv), (vii) ó (viii).
(e) Sólo (i), (ii), (iii), (iv), (vii) ó (viii).

---

17. Si las operaciones fueran asociadas de derecha a izquierda en lugar de de izquierda a derecha (Por ejemplo: $1 - 1 - 1 = 1 - (1 - 1) = 1$ y $2/2/2 = 2/(2/2) = 2$), ¿Cuál sería el resultado de la expresión: $5 - (12/(1 + 2) * 4) + 2$?

(a) 2. (b) -9. (c) -13. (d) 6. (e) 7.

---

18. Las ecuaciones: $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \end{array} \right.$, consideradas en el plano xy, describen:

(a) Dos elipses disjuntas.
(b) Una elipse y una recta que se intersectan en dos puntos.
(c) Dos elipses que se intersectan en un punto.
(d) Dos rectas disjuntas.
(e) Dos rectas que se intersectan en un punto.

---

19. Si se evalúa la circulación del vector posición $\vec{r}$ sobre una curva cerrada Γ en el espacio, se obtiene ...

(a) 2π.
(b) Faltan datos.
(c) un resultado proporcional a la longitud de la curva.
(d) un resultado proporcional al ángulo sólido subtendido por la curva desde el origen.
(e) 0, independientemente de la curva.

---

20. La ecuación $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(y+z) = 1$ define a z como función de x e y, esto es: $z = f(x, y)$. Entonces:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.
(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + 1$.
(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$.
(e) $\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = 1$.

Selección Instituto Balseiro - 2001

Hoja de respuestas

Matemática

Nombre:
Dirección y Tel.:

1.	a	b	c	d	e	11.	a	b	c	d	e
2.	a	b	c	d	e	12.	a	b	c	d	e
3.	a	b	c	d	e	13.	a	b	c	d	e
4.	a	b	c	d	e	14.	a	b	c	d	e
5.	a	b	c	d	e	15.	a	b	c	d	e
6.	a	b	c	d	e	16.	a	b	c	d	e
7.	a	b	c	d	e	17.	a	b	c	d	e
8.	a	b	c	d	e	18.	a	b	c	d	e
9.	a	b	c	d	e	19.	a	b	c	d	e
10.	a	b	c	d	e	20.	a	b	c	d	e