EXAMEN DE SELECCIÓN INSTITUTO BALSEIRO 1997 - MATEMÁTICA

1. Sea *f* una función continua tal que $f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Entonces:

a) $f(x) = \cosh x$
b) $f(x) = \text{senh}\, x$
c) $f(x) = e^{x}$
d) $f(x) = \text{sen}\, x$
e) $f(x) = \cos x$

---

2. Una función derivable $f(x,y,z)$ es constante sobre cada recta paralela a la recta que une el origen con el punto (1,1,1). Entonces:

a) $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = \partial f/\partial z = 1/3$
b) $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = \partial f/\partial z = 1/\sqrt{3}$
c) $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = \partial f/\partial z = 1$
d) $\partial f/\partial x + \partial f/\partial y + \partial f/\partial z = 0$
e) $\partial f/\partial x + \partial f/\partial y + \partial f/\partial z = 1$

---

3. ¿De cuántas maneras puede una maestra repartir tres premios diferentes en un curso de diez estudiantes, sabiendo que un estudiante no puede recibir más de un premio?

a) 640 b) 648 c) 729 d) 720 e) 576

---

4. Los valores de θ que satisfacen $\text{sen}^2(\theta/2) - \cos(\theta) + 1 = 0$ son:

a) $2/3\ k\pi$ y $(2k+1)\pi$ con k entero
b) $1/2\ k\pi$ " " "
c) $1/3\ k\pi$ y $4/3\ k\pi$ " " "
d) $2\ k\pi$ " " "
e) Ninguna de las anteriores es correcta.

---

5. La ecuación del plano que contiene a las rectas $\begin{cases} \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z}{2} \\ \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{2} \end{cases}$ es:

a) $4(x-3) + 7(y-2) + 2z = 0$
b) $8(x-3) + 2(y-2) - 23z = 0$
c) $5(x-3) + 3(y-2) + 2z = 0$
d) $15(x-4) + 9(y-2) - 4z = 0$
e) Ninguna de las anteriores es correcta.

6. ¿Qué condición asegura que la serie $\sum_0^\infty a_n x^n$ converge en $x = 1$?

a) la serie converge para $0<x<1$
b) la serie converge para $-1<x<1$
c) la serie converge para $x = -2$
d) cualquiera de las anteriores
e) ninguna de las anteriores

---

7. Sea $g : R^2 \to R$ una función derivable, y f definida por $f(x,y) = g(g(x,y),g(x,y))$. Entonces puede asegurarse que ...

a) $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y$
b) $\partial f/\partial x + \partial f/\partial y \geq 0$
c) $\text{grad } g|_{(x,y)} \neq 0 \Rightarrow \text{grad } f|_{(x,y)} \neq 0$
d) $\partial g/\partial x + \partial g/\partial y \equiv 0 \Rightarrow \partial f/\partial x + \partial f/\partial y \equiv 0$
e) $\partial f/\partial x = \partial g/\partial \mathrm{x}$

---

8. Uno de los juegos de azar mas populares es el TOTOBINGO® . Cada jugador apuesta por 25 números elegidos entre 40 posibles. Si sus 25 números salen sorteados, gana. Si se inventara un TOTOBINGO-2™ en el cual cada jugador sólo apostara por 15 números y sólo se sortearan 15 números entre los 40, entonces:

a) la probabilidad de ganar en TOTOBINGO® es la misma que la de ganar en TOTOBINGO-2™.
b) la probabilidad de ganar en TOTOBINGO® es la misma que la de perder en TOTOBINGO-2™.
c) la probabilidad de ganar en TOTOBINGO® es mayor que la de ganar en TOTOBINGO-2™.
d) la probabilidad de ganar en TOTOBINGO® es menor que la de ganar en TOTOBINGO-2™.

e) Ninguna de las anteriores es la correcta.

---

9. ¿Para qué valor de k la matriz de transformación $\begin{pmatrix} k & 8 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ deja invariante algún conjunto infinito de vectores del plano?

a) 4 b) -5 c) 3 d) 0 e) Ninguna de las anteriores.

---

10. Considere 2 rectas en el espacio: la que pasa por el origen de coordenadas y tiene dirección (3,-1,1), y la que pasa por el punto (7,0,-1) y tiene dirección (3,1,1). Calcule la mínima distancia entre ambas.

a) 5 b) $3\sqrt{3}$ c) 7/8 d) 0 e) $\sqrt{10}$

11. Sea el número complejo $z=x+iy$, con $x>0$ e $y>0$. ¿Qué condición debe cumplirse para que exista una solución de la ecuación $z=w$, donde w es alguna de las raíces séptimas de z?

a) $y = x = 1/\sqrt{2}$ b) $x = 1/2, y = \sqrt{3}/2$ c) $y/x = tan(\pi/7)$

d) $x = 1, y = \sqrt{3}$ e) no existe solución

---

12. ¿Cuál es el volúmen del sólido que se genera cuando la región delimitada por las curvas

$$y = x^3 + x + 1, \qquad x = 1 \qquad \text{e} \qquad y = 1,$$

se hace girar alrededor de la recta $x = 1$?

a) π
b) $2\,\pi$
c) $\sqrt{2}/2\ \ \pi$
d) $13/30\ \ \pi$
e) $0.57\ \ \pi$

---

13. Las ecuaciones paramétricas $\{r(t) = k / \cos t\ ,\ \varphi(t) = \alpha + t\}$, en coordenadas polares (r,φ) en el plano, con α y k constantes, representan:

a) un círculo
b) una elipse
c) una parábola
d) una recta
e) una hipérbola

---

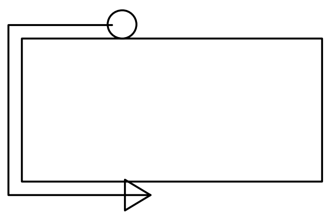
14. Si i es la unidad imaginaria, ¿cuánto vale $i^{\ln i}$?

a) 1 b) i c) -1 d) $e^{-\pi^2/4}$ e) Ninguna de las anteriores.

---

15. Una moneda rueda sin deslizar por la parte exterior de un rectángulo como se muestra en la figura, hasta volver al punto de partida. El alto del rectángulo es dos veces la circunferencia de la moneda y su largo dos veces el alto. ¿Cuántas vueltas gira la moneda sobre su eje?

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e)16



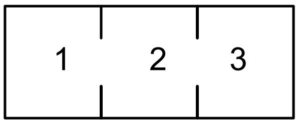
16. La integral $I = \oint_C \left(e^x sen\, y\, dx + e^x cos\, y\, dy \right)$ sobre la curva $C=\{x^2+y^2=1\}$ es tal que:

a) $I<0$ b) $I=\pi/2$ c) $I=0$ d) $I=2\pi$

e) ninguna de las anteriores es correcta

---

17. Un ratón se mueve frenéticamente por tres habitaciones interconectadas como se muestra en la figura. En cada momento el ratón decide con igual probabilidad quedarse un segundo más en la habitación en la que está o moverse a una habitación contigua. Así, estando en la 1 o la 3 puede decidir con igual probabilidad quedarse allí o pasar a la 2, mientras que estando en la 2 puede decidir con igual probabilidad quedarse, pasar a la 1 o pasar a la 3. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al ratón en cada una de las habitaciones?



a) (1/3,1/3,1/3) b) (1/4,1/2,1/4) c) (0,1,0) d) (1/2,0,1/2) e) (2/7,3/7,2/7)

---

18. El límite para $x \to 0$ de $(e^x - 1 - x) / x^2$ es:

a) Indefinido b) ½ c) -½ d) 1 e) -1

---

19. En R^3 ,los planos $x + 3y - 2z + 4 = 0$ y $2x - y + z - 1 = 0$

a) Son paralelos

b) Son ortogonales

c) Se cortan con un ángulo de aproximadamente 40^{o}

d) Se cortan con un ángulo de aproximadamente 70^{o}

e) Se cortan con un ángulo de aproximadamente 20^{o}

---

20. Sean $f,g : R \to R$ funciones tales que la compuesta $f(g(x))$ es discontinua. Entonces:

a) f es discontinua

b) g es discontinua

c) al menos una de las dos es discontinua

d) ambas son discontinuas

e) ninguna de las anteriores es cierta