



Sistemas de coordenadas rotantes

R. O. Barrachina

Fue entonces cuando vi el Péndulo.

La esfera, colgando del extremo de un largo hilo sujeto de la bóveda del coro, describía sus amplias oscilaciones con isócrona majestad.

Sabía, aunque cualquiera hubiese podido percibirlo en la magia de aquella plácida respiración, que el período obedecía a la relación entre la raíz cuadrada de la longitud del hilo y ese número π que, irracional para las mentes sublunares, por divina razón vincula necesariamente la circunferencia con el diámetro de todos los círculos posibles...

Si hubiese permanecido allí a pesar del paso de las horas, ... habría caído víctima de una ilusión: que el plano de oscilación del Péndulo había completado un círculo completo, había regresado a su punto de partida en treinta y dos horas, describiendo una elipse que rotaba alrededor de su centro con una velocidad proporcional al seno de su latitud...

Yo sabía que la Tierra estaba rotando, y yo con ella, y Saint-Martin-des-Champs y todo París conmigo, y que juntos girábamos debajo del Péndulo, cuyo propio plano nunca cambiaba de dirección, porque allá arriba, a lo largo de la extrapolación infinita de su alambre, más allá del cielo del coro, más allá de las más distantes galaxias, se encuentra el Único Punto Fijo en el universo, eternamente inmóvil.

Así que no era tanto a la Tierra hacia la que yo dirigía mi mirada, sino a los Cielos, donde se celebraba el misterio de la inmovilidad absoluta.

El Péndulo me estaba diciendo que, siendo todo móvil, el globo, el sistema solar, las nebulosas, los agujeros negros y todos los hijos de la gran emanación cósmica, desde los primeros eones hasta la materia más viscosa, un solo punto era perno, clavija, tirante ideal, dejando que el universo se moviese a su alrededor. Y ahora yo participaba en aquella experiencia suprema, yo, que sin embargo me movía con todo y con el todo, pero era capaz de ver Aquello, lo Inmóvil, la Fortaleza, la Garantía, la niebla resplandeciente que no es cuerpo ni tiene figura, forma, peso, cantidad o calidad, y no ve, no oye, ni está sujeta a la sensibilidad, no está en algún lugar o en algún tiempo, en algún espacio, no es alma, inteligencia, imaginación, opinión, número, orden, medida, substancia, eternidad, no es tinieblas ni luz, no es error y no es verdad.

Fragmentos de “El péndulo de Foucault” de Umberto Eco



1. Introducción

Durante la primer Guerra Mundial tuvo lugar una muy extraña batalla naval cerca de las Islas Malvinas. Unos cruceros ingleses rodearon a dos acorazados alemanes. Cuando comenzó el fuego cruzado, las naves enemigas se encontraban a unos 15 kilómetros de distancia una de otra. Pero, todos los disparos erraban a los blancos por casi 100 metros. Nadie podía comprender lo que ocurría. Después de disparar más de mil cañonazos, los artilleros ingleses comenzaron a reajustar sus miras, logrando acertar unos 60 disparos directos, ganando así la batalla. Ellos sabían muy bien que en disparos de tan largo alcance, el movimiento de la Tierra no puede ser despreciado en el cálculo de las trayectorias. De hecho, la Tierra “no” es un sistema inercial. No sólo gira sobre su eje, sino que también se desplaza con un movimiento acelerado. Aún se podría definir un sistema de referencia inercial desde el cual describir el movimiento de un proyectil por medio de la segunda ecuación de Newton.

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} .$$

En ese sistema, la Tierra estaría girando con una velocidad angular igual a una revolución por día. Sin embargo, en general se suele utilizar un sistema de referencia no inercial fijo a la Tierra. A primera vista se podría pensar que esta opción es más complicada. Sin embargo veremos que es posible recuperar la segunda ecuación de Newton, siempre que se tenga el cuidado de incorporar algunas fuerzas ficticias. Los artilleros ingleses habían considerado la acción de estas fuerzas, pero lo habían hecho mal. Habían olvidado que una de esas fuerzas invierte su signo al pasar del hemisferio norte al hemisferio sur.

2. Cambio de coordenadas entre sistemas rotantes

Consideremos un sistema de referencia arbitrario O' que se mueve respecto de un sistema inercial O . En el caso de la Tierra, este movimien-

to incluye –por ejemplo– su rotación alrededor del Sol. También es posible, como de hecho ocurre con la Tierra, que el sistema de referencia no inercial esté rotando respecto al sistema inercial. Consideremos primero esta rotación. El movimiento de traslación lo analizaremos más adelante, y supondremos –por ahora– que los orígenes de ambos sistemas de referencia, inercial O y no inercial O' , coinciden. Un vector cualquiera \mathbf{q} puede representarse en cualquiera de ambos sistemas de referencia como

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= q_x \hat{\mathbf{x}} + q_y \hat{\mathbf{y}} + q_z \hat{\mathbf{z}} = \\ &= q_{x'} \hat{\mathbf{x}}' + q_{y'} \hat{\mathbf{y}}' + q_{z'} \hat{\mathbf{z}}' . \end{aligned}$$

En otro capítulo se estudian las ecuaciones de transformación entre las coordenadas y los versores de ambos sistemas, representadas por una matriz ortogonal $\mathcal{A}_{OO'}$. Supongamos ahora que este vector depende de un escalar (por ejemplo, el tiempo t) y queremos calcular su derivada $d\mathbf{q}/dt$. Pero, ¿cómo hacemos tal cálculo? No parece una pregunta muy difícil de responder. En principio significa derivar las coordenadas, (q_x, q_y, q_z) ó $(q_{x'}, q_{y'}, q_{z'})$, respectivamente,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right|_O &= \frac{dq_x}{dt} \hat{\mathbf{x}} + \frac{dq_y}{dt} \hat{\mathbf{y}} + \frac{dq_z}{dt} \hat{\mathbf{z}} , \\ \left. \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right|_{O'} &= \frac{dq_{x'}}{dt} \hat{\mathbf{x}}' + \frac{dq_{y'}}{dt} \hat{\mathbf{y}}' + \frac{dq_{z'}}{dt} \hat{\mathbf{z}}' . \end{aligned}$$

Sin embargo, estas dos derivadas sólo coinciden cuando ambos sistemas de referencia no están en movimiento relativo. Claramente, por la misma definición del sistema de referencia inercial, los versores $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ pueden considerarse fijos (a los efectos de un cálculo cinemático). Pero si la matriz de transformación $\mathcal{A}_{OO'}$ depende del tiempo, entonces no es lícito afirmar lo mismo para los versores $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$ y $\hat{\mathbf{z}}'$ del sistema no inercial. Y por lo tanto, el cálculo debe incluir sus derivadas. Es decir

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right|_O &= \left(\frac{dq_x}{dt} \hat{\mathbf{x}} + \frac{dq_y}{dt} \hat{\mathbf{y}} + \frac{dq_z}{dt} \hat{\mathbf{z}} \right) = \\ &= \left(\frac{dq_{x'}}{dt} \hat{\mathbf{x}}' + \frac{dq_{y'}}{dt} \hat{\mathbf{y}}' + \frac{dq_{z'}}{dt} \hat{\mathbf{z}}' \right) + \left(q_{x'} \frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} + q_{y'} \frac{d\hat{\mathbf{y}}'}{dt} + q_{z'} \frac{d\hat{\mathbf{z}}'}{dt} \right) = \end{aligned}$$



$$= \left. \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right|_{O'} + \left(q_{x'} \frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} + q_{y'} \frac{d\hat{\mathbf{y}}'}{dt} + q_{z'} \frac{d\hat{\mathbf{z}}'}{dt} \right).$$

Para completar esta relación entre las derivadas en ambos sistemas de referencia, debemos calcular la derivada temporal de los versores $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$ y $\hat{\mathbf{z}}'$. Así,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}' \\ \hat{\mathbf{y}}' \\ \hat{\mathbf{z}}' \end{bmatrix} = \frac{d\mathcal{A}_{OO'}}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \frac{d\mathcal{A}_{OO'}}{dt} \mathcal{A}_{O'O} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}' \\ \hat{\mathbf{y}}' \\ \hat{\mathbf{z}}' \end{bmatrix}.$$

Analicemos ahora la matriz $(d\mathcal{A}_{OO'}/dt) \cdot \mathcal{A}_{O'O}$. Dado que $\mathcal{A}_{OO'} \cdot \mathcal{A}_{O'O} = \mathcal{I}$, resulta

$$\frac{d\mathcal{A}_{OO'}}{dt} \cdot \mathcal{A}_{O'O} = -\mathcal{A}_{OO'} \cdot \frac{d\mathcal{A}_{O'O}}{dt} = -\mathcal{A}_{O'O}^t \cdot \left(\frac{d\mathcal{A}_{OO'}}{dt} \right)^t = - \left(\frac{d\mathcal{A}_{OO'}}{dt} \cdot \mathcal{A}_{O'O} \right)^t.$$

Vemos que la matriz $(d\mathcal{A}_{OO'}/dt) \cdot \mathcal{A}_{O'O}$ es antisimétrica. Escribimos

$$\frac{d\mathcal{A}_{OO'}}{dt} \cdot \mathcal{A}_{O'O} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{z'} & -\omega_{y'} \\ -\omega_{z'} & 0 & \omega_{x'} \\ \omega_{y'} & -\omega_{x'} & 0 \end{bmatrix},$$

de forma tal que

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}' \\ \hat{\mathbf{y}}' \\ \hat{\mathbf{z}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{z'} & -\omega_{y'} \\ -\omega_{z'} & 0 & \omega_{x'} \\ \omega_{y'} & -\omega_{x'} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}' \\ \hat{\mathbf{y}}' \\ \hat{\mathbf{z}}' \end{bmatrix}.$$

El vector $\vec{\omega} = \omega_{x'}\hat{\mathbf{x}}' + \omega_{y'}\hat{\mathbf{y}}' + \omega_{z'}\hat{\mathbf{z}}'$ es ni más ni menos que la velocidad angular instantánea entre ambos sistemas. Consideremos, por ejemplo, un sistema de referencia rotado un ángulo ϕ alrededor del eje $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}'$. En tal caso, $\hat{\mathbf{x}}' = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{y}}' = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}$. Derivando respecto de t obtenemos

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} = \frac{d\phi}{dt} (-\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}) = \frac{d\phi}{dt} \hat{\mathbf{y}}' = \omega_{z'} \hat{\mathbf{y}}' \quad \text{si } \omega_{x'} = \omega_{y'} = 0.$$

De manera similar, para una rotación alrededor del eje $\hat{\mathbf{y}}'$ obtenemos, $d\hat{\mathbf{x}}'/dt = -\omega_{y'} \hat{\mathbf{z}}'$, Y componiendo ambas rotaciones, obtenemos la expresión anterior para una rotación arbitraria, $d\hat{\mathbf{x}}'/dt = \omega_{z'} \hat{\mathbf{y}}' - \omega_{y'} \hat{\mathbf{z}}'$.

Reemplazando en una ecuación anterior, obtenemos la relación entre las derivadas calculadas en ambos sistemas de referencia.

$$\left. \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right|_O = \left. \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right|_{O'} + \vec{\omega} \times \mathbf{q}.$$

Debe advertirse que no realizamos ninguna suposición respecto del vector \mathbf{q} . Puede tratarse de -por ejemplo- un vector posición, una velocidad ó una velocidad angular. Por lo tanto, la relación anterior puede pensarse como una relación entre operadores, independiente del vector al que es aplicada.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_O = \left. \frac{d}{dt} \right|_{O'} + \vec{\omega} \times.$$

Por ejemplo, podemos aplicarla en forma sucesiva para obtener la relación entre las derivadas segundas,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_O &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{O'} + \vec{\omega} \times \right) \cdot \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{O'} + \vec{\omega} \times \right) = \\ &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{O'} + 2\vec{\omega} \times \left. \frac{d}{dt} \right|_{O'} + \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{O'} \times + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times). \end{aligned}$$

Si lo aplicamos al vector posición $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ de una partícula de masa m sometida a una fuerza \mathbf{F} , obtenemos la siguiente ecuación de movimiento en el sistema no inercial O' ,

$$\mathbf{F} = m \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_O = m \left[\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{O'} + 2\vec{\omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{O'} + \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{O'} \times \mathbf{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \right].$$

Esta ecuación nos permite resolver un problema mecánico desde un sistema de referencia no inercial, siempre que incorporemos tres fuerzas ficticias en la segunda ecuación de Newton,

$$m \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{O'} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{coriolis}} + \mathbf{F}_{\text{centrífuga}} + \mathbf{F}_{\text{aceleración}},$$



donde¹

$\mathbf{F}_{\text{Coriolis}}$	$= -2m\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$	Fuerza de Coriolis,
$\mathbf{F}_{\text{centrífuga}}$	$= -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r})$	Fuerza centrífuga,
$\mathbf{F}_{\text{aceleración}}$	$= m\mathbf{r} \times \dot{\vec{\omega}}$	

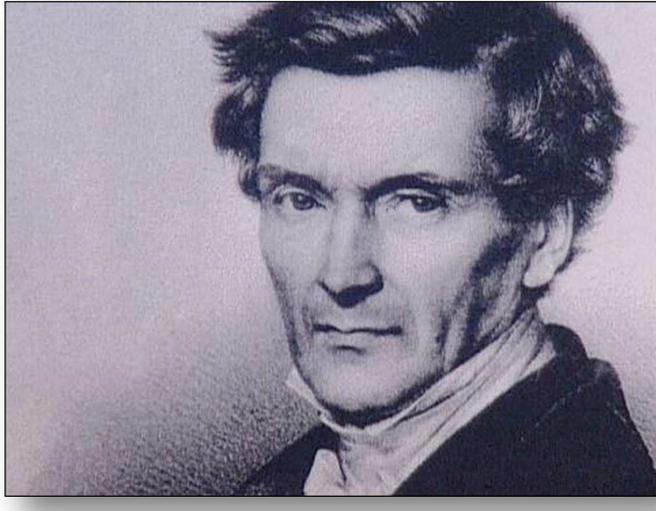


Figura 1. Gaspard-Gustave de Coriolis nació el 21 de mayo de 1792 en París, Francia. Su padre, Jean-Baptiste-Elzéar Coriolis, capitán del ejército francés, había peleado en la campaña norteamericana en el cuerpo de Rochambeau, y debió huir a Nancy cuando la monarquía fue abolida el 21 de setiembre de ese mismo año. Coriolis pasó su infancia en esa ciudad. Después de estudiar en la École Polytechnique se graduó en la École des Ponts et Chaussées de París. En 1829 ocupó un puesto de Profesor de Mecánica en la École Centrale des Arts et Manufactures. Debido a la huída de Cauchy tras la revolución de julio de 1830, se le ofreció a Coriolis ocupar su puesto en la École Polytechnique, pero el se rehusó. Dos años después aceptó un puesto en la École des Ponts and Chaussées donde enseñaba Mecánica Aplicada junto con Navier. A la muerte de éste en 1836 ocupó su cátedra en la École y también fue elegido para reemplazarlo en la Académie des Sciences. En 1838 reemplazó a Dulong como director de estudios de la École Polytechnique. La mala salud que lo afligía desde su juventud lo llevó a una temprana muerte el 19 de setiembre de 1843.

3. La fuerza de Coriolis

Junto con Poncelet y Navier, Gaspard-Gustave de Coriolis fue uno de los creadores del concepto de “trabajo” que se analiza en otro capítulo. Sin embargo, hoy es más recordado por un tratado publicado en 1835 con el nombre de *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*, en el cual demostraba la presencia en sistemas rotantes de la fuerza ficticia que hoy lleva su nombre, $\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$.



Figura 2. Para comprender el origen de la fuerza de Coriolis es conveniente considerar, como primer ejemplo, el movimiento de un satélite transpolar. Visto desde un sistema inercial, este satélite describe un movimiento circular alrededor de la Tierra, pasando por los polos. En una primera aproximación, la única fuerza aplicada sobre el satélite apunta hacia el centro de la Tierra. Sin embargo, un observador en la base norteamericana en el polo sur, verá que en lugar de atravesar el cielo en una trayectoria rectilínea y uniforme, el satélite sigue una trayectoria curvada hacia la izquierda. Por el contrario, un observador en el polo norte verá que esta desviación es hacia la derecha. Para poder explicar este movimiento en base a la segunda ley de Newton, ambos observadores deberán suponer que esta trayectoria es el resultado de una fuerza aplicada sobre el satélite. Esta es justamente la fuerza de Coriolis.



3.1. Movimiento de proyectiles

Consideremos un objeto moviéndose sobre la superficie de la Tierra en una colatitud θ . Ubicamos los ejes de nuestro sistema de coordenadas no inercial de la siguiente manera,

\hat{x} hacia el este,
 \hat{y} hacia el norte,
 \hat{z} hacia arriba.

La velocidad angular es, entonces, $\vec{\omega} = \omega (\sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z})$, y la fuerza de Coriolis está dada por

$$\mathbf{F}_{\text{coriolis}} = -2m\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = 2m\omega ((\dot{y} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta) \hat{x} - \dot{x} \cos \theta \hat{y} + \dot{x} \sin \theta \hat{z}) .$$

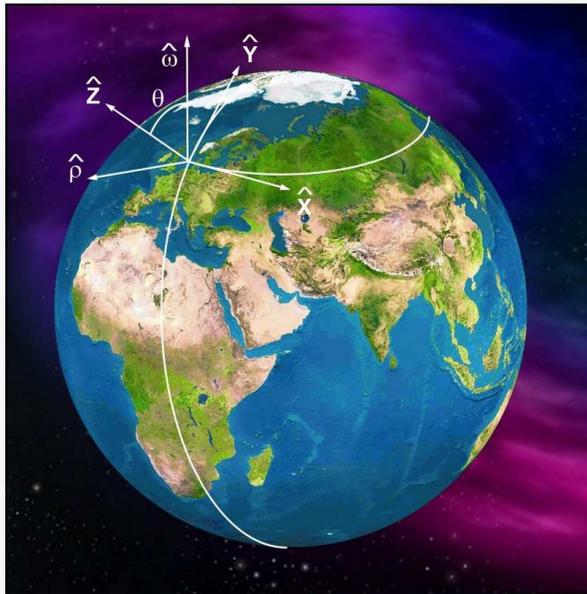
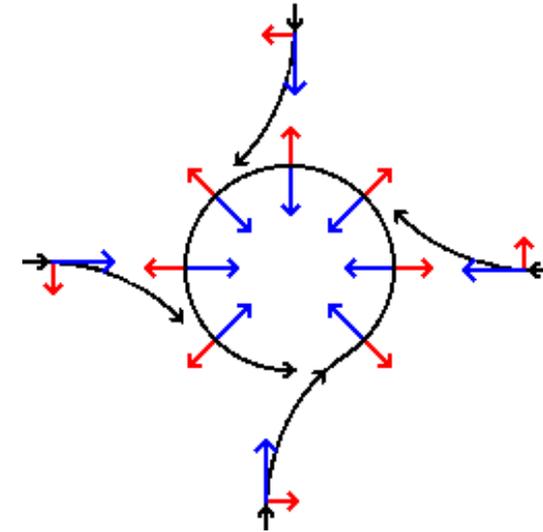


Figura 3. Sistema de coordenadas relevante para la descripción del movimiento de un proyectil en una co-latitud θ .

Vemos que un proyectil moviéndose en dirección norte-sur, sufre una desviación este-oeste por acción de una fuerza igual a $\mathbf{F}_{\text{coriolis}} = 2m\omega \dot{y} \cos \theta \hat{x}$. Consideremos un proyectil moviéndose desde el sur hacia el norte. En el hemisferio norte $0 < \theta < \pi/2$, y por lo tanto se desvía hacia el este, mientras que en el hemisferio sur $\pi/2 < \theta < \pi$, y la desviación es hacia el oeste. En cambio, si el proyectil se mueve de oeste a este obtenemos $\mathbf{F}_{\text{coriolis}} = 2m\omega \dot{x} (-\cos \theta \hat{y} + \sin \theta \hat{z}) = 2m\omega \dot{x} \hat{\rho}$, donde $\hat{\rho}$ es la dirección radial en coordenadas cilíndricas. Vemos que se produce una desviación norte-sur, tanto más importante cuanto más cercano a los polos es el movimiento. El efecto combinado de estos dos procesos es que un proyectil tiende a desviarse en sentido horario en el hemisferio norte, y en sentido inverso en el hemisferio sur. El efecto anterior se observa en el caso del movimiento de los vientos y en la formación de ciclones.



Cuando una región de baja presión atrae el aire circundante por acción del gradiente de presión, el viento tiende a desviarse de su trayectoria, hacia la derecha en el hemisferio norte, dejando la zona de baja presión a la izquierda. Eventualmente se alcanza un equilibrio entre la presión (representada en azul en la figura anterior) que empuja hacia el centro de baja presión, y la

fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga (representada en rojo) que empuja hacia fuera. El viento circula en una especie de tiovivo o calesita denominada “ciclón”, a lo largo de una isobara, girando en sentido antihorario en el hemisferio norte, con el centro de baja presión a la izquierda. Por el contrario, el aire que circula cerca de un centro de alta presión crea un efecto inverso al ciclón, y se denomina anticiclón. En casos extremos, se puede formar un huracán.

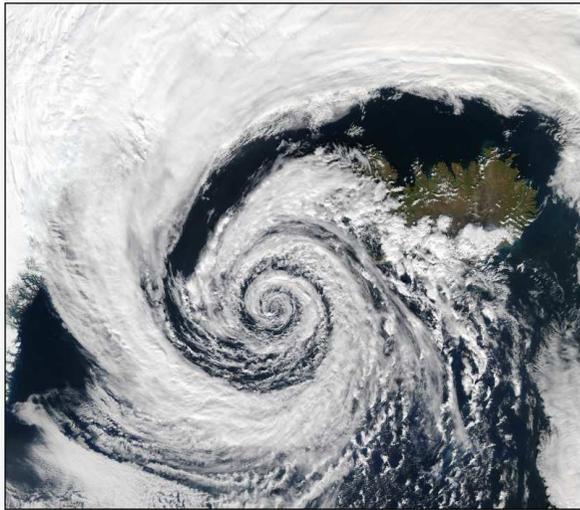


Figura 5. En esta imagen satelital de un ciclón cerca de Islandia se observa su sentido de giro antihorario.

En el hemisferio sur, el mismo efecto hace que el ciclón gire al revés que en el hemisferio norte, es decir en sentido horario. En una escala aún mayor, la fuerza de Coriolis produce que el aire que tiende hacia las zonas más calientes en el ecuador se desvíe hacia el oeste en el norte y hacia el este en el sur.



Figura 6. Ciclón cerca de la costa patagónica.

Una conocida leyenda urbana dice que al desagotar una bañera o un inodoro, el agua gira en un sentido en el hemisferio norte, y en sentido opuesto en el hemisferio sur, debido a la fuerza de Coriolis. Sin embargo, las dimensiones involucradas son tales que la fuerza de Coriolis es muy pequeña en comparación con las perturbaciones a las que está sometido el flujo. De hecho, la fuerza de Coriolis sólo actúa a gran escala. Ciertamente no en un drenaje, ni tampoco en el viento que sopla sobre la superficie. Inclusive todavía se discute si tiene algún efecto apreciable sobre los meandros que forman los ríos. En cambio, es muy importante en meteorología y oceanografía, por ejemplo en la desviación que produce sobre los vientos de altitud y las corrientes oceánicas.

Imaginemos ahora que estamos en un planeta 1400 veces más grande que la Tierra. La velocidad de rotación en el ecuador es 25 veces mayor, y por lo tanto el efecto de la fuerza de Coriolis es comparativamente gigantesco. Ese planeta es Jupiter, y tiene el mayor y más duradero anticiclón de todo el sistema solar, la “gran mancha roja”. Esta peculiaridad de la atmósfera joviana fue descubierta separadamente por los astrónomos Robert Hooke y

Giovanni Cassini en 1660, aunque su explicación tuvo que esperar hasta el siglo veinte, y fue debida al astrónomo Gerard Kuiper. Es más grande que la Tierra, está ubicada en el hemisferio sur y gira en sentido antihorario, lo cual nos dice que se trata de un sistema de alta presión. Su coloración se debe a distintas concentraciones de compuestos de fósforo y azufre.

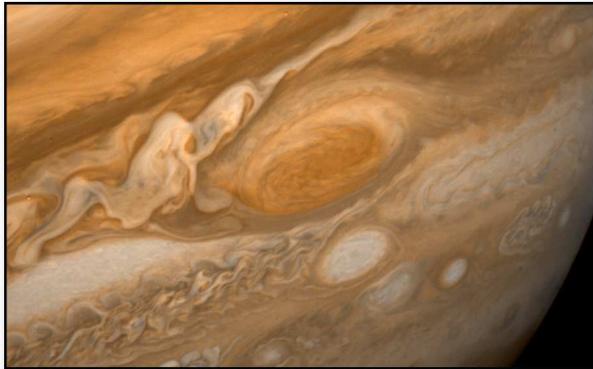


Figura 7. La gran mancha roja de Júpiter.

Neptuno también muestra un efecto similar. Se trata de su gran mancha negra ubicada en el hemisferio sur.

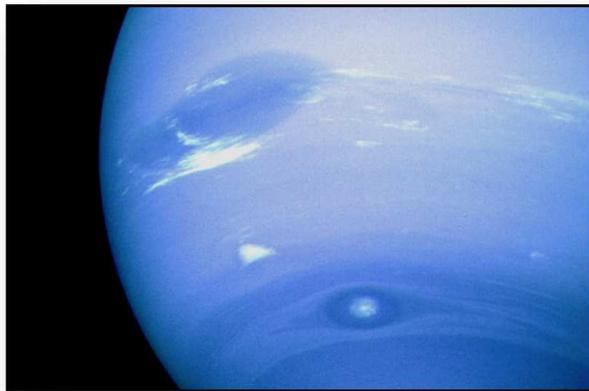


Figura 8. La gran mancha negra de Neptuno.

3.2. El problema de la torre

Hacia fines del siglo XVII, Newton mantenía correspondencia con Robert Hooke, secretario de la Sociedad Real². En una de esas cartas, Hooke le pedía opinión a Newton sobre una monografía suya, donde –entre otros temas– trataba el problema de la rotación de la Tierra. En su respuesta Newton le dio una idea para probar este movimiento: La objeción clásica contra la rotación diaria de la Tierra era que un cuerpo que cae sería dejado atrás por la Tierra que sigue girando debajo de él, y por lo tanto debería caer hacia el oeste de la vertical. Pero nunca se ve que esto ocurra. Newton le sugirió a Hooke que en realidad debería ser al revés. La velocidad en la cima es mayor que en la base, y por lo tanto un cuerpo en caída libre debería aterrizar al este de la vertical.



Figura 9. Aunque se pensaba que este retrato representaba al botanista John Ray, la historiadora Lisa Jardine afirma que se trata de la única imagen conocida de Robert Hooke (18 de julio de 1635 - 3 de marzo de 1703).



Vemos que esto es realmente así, ya que desde un sistema no inercial fijo a la torre, la fuerza de Coriolis está dirigida hacia el este.

$$\mathbf{F}_{\text{coriolis}} = -2m\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = 2m\omega |\dot{z}| \sin\theta \hat{\mathbf{x}}.$$

Es muy instructivo analizar este problema desde un sistema de coordenadas no rotante. Puesto que la fuerza de gravedad es central, podemos aplicar conservación del impulso angular, $\vec{\ell} = m\vec{r} \times \vec{v}$. Obtenemos $\ell \approx m(R+z)v$, donde z es la altura a la que se encuentra el cuerpo respecto de la superficie de la Tierra, y v es su velocidad tangencial a lo largo de una órbita elíptica en un plano que forma un ángulo θ con $\vec{\omega}$. Cuando el cuerpo es soltado desde la cima de la torre, $z = h$ y $v = (R+h)\omega \sin\theta$. Esta velocidad aumenta al caer el cuerpo como

$$v = \frac{\ell}{m(R+z)} = \frac{(R+h)^2}{R+z} \omega \sin\theta.$$

De esta manera, la velocidad angular respecto del eje de la Tierra es

$$\omega(z) = \frac{v}{(R+z) \sin\theta} = \left(\frac{R+h}{R+z}\right)^2 \omega. \quad (1)$$

Vemos que esta velocidad angular se mantiene mayor que ω en todo instante, y por lo tanto el cuerpo se adelanta a la rotación de la Tierra, cayendo al este de la vertical. Reemplazando la altura $z = h - gt^2/2$ en la ecuación (1), obtenemos

$$\omega(t) = \left(\frac{R+h}{R+h - gt^2/2}\right)^2 \omega.$$

Puesto que $gt^2/2$ varía entre 0 y h , y h es mucho menor que el radio de la Tierra R , podemos aproximar

$$\omega(t) \approx \left(1 + \frac{g}{R}t^2\right) \omega.$$

De manera que la desviación x hacia el este es tal que

$$\dot{x}(t) = [\omega(t) - \omega] R \sin\theta = g t^2 \omega \sin\theta. \quad (2)$$

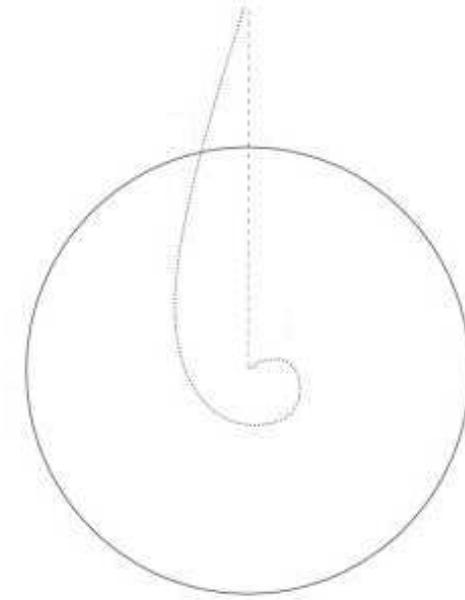


Figura 10. Para reforzar su argumento Newton le envió a Hooke un dibujo mostrando la trayectoria que seguiría el cuerpo como parte de una espiral que termina en el centro de la Tierra. Hooke le contestó días más tarde, haciéndole ver, de la manera más cortés posible, que en su opinión la trayectoria no debería ser una espiral sino algo parecido a una elipse. Podemos juzgar la impresión que le causó a Newton esta corrección de Hooke por el hecho de que seis años después recordaba esta correspondencia en detalle. Más aún, treinta años después, todavía afirmaba que por esa fecha él ya había alcanzado una clara comprensión del tema, y que lo que Hooke interpretó como una espiral se había debido en realidad –según sus propias palabras– a “un trazo negligente del lápiz”, olvidando, tal vez, que en la carta el llamaba a la trayectoria, explícitamente, una espiral.

Integrando respecto del tiempo, obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{3} g t^3 \omega \sin\theta,$$



que podemos escribir de la siguiente manera alternativa

$$x(t) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} g t^2 \right) \omega t \sin \theta = \frac{4\pi}{3} (h - z) \frac{t}{T} \sin \theta ,$$

donde $T \approx 24$ horas es el período de rotación de la Tierra. De esta manera, cuando el cuerpo alcanza la base de la torre ($z = 0$) en el instante $t_f = \sqrt{2h/g}$, la desviación hacia el este es

$$x(t_f) = \frac{4\pi}{3} h \frac{t_f}{T} \sin \theta . \quad (3)$$

Esta desviación depende de la colatitud θ como $x(t_f) \propto \sin \theta$. Como $\sin \theta$ es siempre positivo, al variar θ entre 0° (polo norte) y 180° (polo sur), vemos que la desviación es siempre hacia el este, independientemente del hemisferio donde se realice el experimento. Es máxima en el ecuador y nula en los polos.

También podemos llegar al mismo resultado desde un sistema no inercial. Usando la expresión de la Fuerza de Coriolis encontrada anteriormente, obtenemos la siguiente ley de Newton para la desviación hacia el este, $\ddot{x} = 2\omega |\dot{z}| \sin \theta$. Reemplazando $\dot{z} = -gt$ e integrando respecto al tiempo una vez, obtenemos $\dot{x}(t) = g t^2 \omega \sin \theta$, que es la misma expresión (2) obtenida desde un sistema inercial.

Posiblemente, el mejor lugar que hubiese podido encontrar Hooke para realizar este experimento hubiese sido la catedral de Saint Paul en Londres, que se encuentra a una colatitud $\theta = 38^\circ 28'$. Si bien la cúpula se eleva hasta una altura de 111 metros, es decir 365 pies (1 pie por cada día del año), el domo interior tiene una altura de $h = 68$ metros. Al arrojar un cuerpo pesado hacia el centro de la nave desde dicha altura, el tiempo de caída sería $t_f = \sqrt{2h/g} \approx 3.7$ segundos, y por lo tanto

$$x(t_f) = \frac{4\pi}{3} h \frac{t_f}{T} \sin \theta \approx 4.2 \times 68\text{m} \times \frac{3.7\text{seg}}{86400\text{seg}} \times 0.62 \approx 8 \text{ milímetros} ,$$

que es una longitud demasiado pequeña como para poder brindar un resultado conclusivo, al menos en el siglo XVII.



Figura 11. La respuesta de Newton a la segunda carta de Hooke fue seca y cortante. Admitió su error, pero le indicó que, a su vez, él también estaba equivocado, pues siendo la gravedad uniforme, la trayectoria no puede ser una elipse, y le indicó como debería ser esta trayectoria. Pocos días después Hooke le escribió, indicándole a Newton que nuevamente se estaba equivocando en sus apreciaciones. Una segunda corrección ya era demasiado, y Newton decidió interrumpir su correspondencia con Hooke. Dos semanas más tarde, y sin saber del enojo de Newton, Hooke le volvió a escribir una carta diciéndole que había realizado con éxito el experimento sugerido por Newton. La catedral de Saint Paul es el mejor lugar de Londres que Hooke hubiese podido encontrar para realizar este experimento. Sin embargo, Hooke debía estar alardeando y en realidad no llegó a realizar el “experimento de la torre”.





Figura 12. Jean-Bertrand-Léon Foucault nació en París el 19 de setiembre de 1819. Ya desde muy joven demostró tener grandes habilidades mecánicas. Siendo un adolescente construyó un bote, un telégrafo mecánico y un motor a vapor. Sin embargo, decidió estudiar medicina. ¡Grave error! Al poco tiempo tuvo que abandonar sus estudios, ya que no soportaba la vista de la sangre, y volvió a sus trabajos mecánicos, aunque de manera autodidacta. En 1850 la Real Sociedad de Londres le otorgó la medalla Copley por sus trabajos sobre la relación entre energía mecánica, calor y magnetismo. En 1855 el Observatorio de París creó una cátedra de Física para él. En los últimos años de su vida se convirtió en un católico ferviente. Y justo cuando había logrado montar un gran laboratorio, lo sorprendió un ataque de parálisis que acabó con sus prácticas científicas. Falleció en París el 11 de febrero de 1868.

3.3. El péndulo de Foucault

Jean-Bertrand-Léon Foucault era un investigador con múltiples intereses. Trabajó con Finch en los efectos de interferencia que afectaban los daguerrotipos. Con Regnault estudió la visión binocular. Y con Fizeau (1819 – 1896) logró tomar la primera fotografía del sol. Luego de acordar una competencia amigable en pos de la medición de la velocidad de la luz, Fizeau lo logró en 1849 con el método de la rueda dentada, mientras que Foucault alcanzó el éxito en 1851, utilizando un espejo rotante, tal como le había sugerido Arago. Estos fueron experimentos sorprendentes, ya que constituyeron las primeras mediciones de la velocidad de la luz que no se basaban en métodos astronómicos, sino en equipos experimentales compactos. Además permitían determinar la velocidad de la luz en distintos medios transparentes. También se debe a Foucault el invento del giroscopio. Sin embargo, el experimento por el que más se lo recuerda es el péndulo que lleva su nombre, y con el que demostró la rotación de la Tierra. Su modelo más perfeccionado es el que montó en 1851 en el Panteón de París, con una pesa de 28 kilogramos en el extremo de un cable de 67 metros de alto.

Este péndulo fue inventado por accidente. En 1848, Foucault estaba trabajando una larga varilla de metal en su torno, cuando su extremo comenzó a vibrar de arriba a abajo. Lentamente rotó el portabroca en 90 grados. Pero la vibración se mantuvo en la misma dirección. Esto le pareció extraño. Entonces colocó un pequeño péndulo en el extremo de una perforadora y lo hizo oscilar. Entonces encendió la perforadora, pero el péndulo siguió oscilando en el mismo plano. Entonces decidió dar un paso más, y construyó un péndulo de 3 metros de largo con una pesa de 5 kilogramos. Antes de que su movimiento se amortiguara completamente, pudo observar que el plano de oscilación parecía rotar en sentido horario. Convencido de que el efecto era real, construyó un segundo péndulo de 11 metros de largo en el observatorio de París. Este también rotaba en sentido horario. Finalmente, el gobierno le pidió construir un péndulo “realmente grande” para la exhibición de París de 1850, para ser instalado en el Panteón. Se puso gran cuidado en que el cable de 67 metros fuese perfectamente homogéneo. Como peso se utilizó una bala de cañón de bronce revestida en plomo de 28 kilogramos, con



una aguja en el extremo que dejaba una marca sobre la arena que se había desparramado sobre el piso.

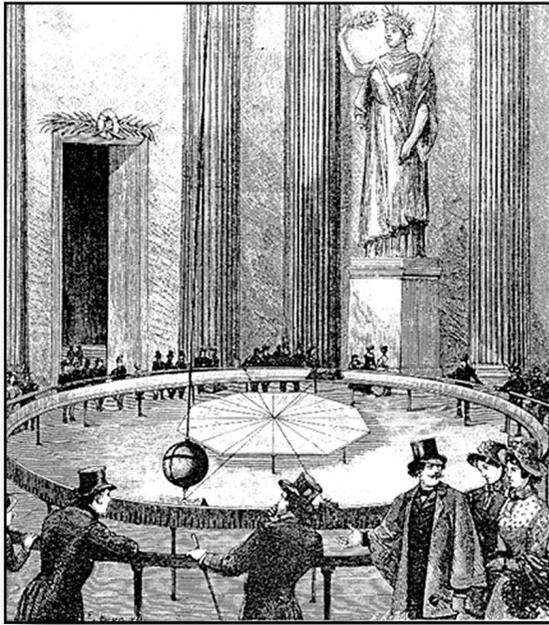


Figura 13. El día de la inauguración en el Panteón de París, la bola en el extremo del péndulo se ató a un lado con una cuerda, y con gran ceremonia se la soltó. La bola comenzó a dibujar una línea recta sobre la arena. Después de varios minutos de suspenso, la gente comenzó a advertir que la línea se comenzaba a ensancharse hacia la derecha, tomando la forma de una hélice.

Como el péndulo era muy largo, la componente vertical de la fuerza de Coriolis sólo proporcionaba una muy pequeña corrección a la fuerza de gravedad, cuyo signo se alternaba con cada medio período. Además, teniendo en cuenta que $\dot{z} \approx 0$, resultaban las siguiente ecuaciones para el movimiento de la pesa,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{g}{\ell}x + 2\omega \dot{y} \cos \theta , \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{\ell}y - 2\omega \dot{x} \cos \theta ,\end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_1 t) , \\ y &= A \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_1 t) ,\end{aligned}$$

con $\omega_0 = \omega \cos \theta$ y $\omega_1^2 = \omega_0^2 + g/\ell$. En el instante inicial, el péndulo se encuentra rotando en el plano x . Pero a medida que pasa el tiempo, el plano de oscilación comienza a girar, y después de un tiempo igual a $1/4\omega_0 = 1/4\omega \cos \theta$ estará girando en un plano perpendicular. Vemos que el período de giro del plano de oscilación no es exactamente igual a 12 horas, sino mayor, dependiendo de la colatitud θ donde se instale el péndulo. En particular, a $\theta = 45^\circ$ este tiempo es de aproximadamente 17 horas. Sólo en los polos, el período de giro del plano de oscilación es de 12 horas. Este experimento fue llevado a cabo por primera vez en el invierno del año 2001, en la base antártica de Norteamérica en el polo sur, por Mike Town, estudiante de doctorado de la Universidad de Washington, John Bird y R. Allan Baker de la Universidad Estatal de Sonoma.

En la actualidad dos de los péndulos de Foucault mas conocidos son el que funciona en la entrada de las Naciones Unidas en Nueva York, instalado en 1955 como un presente Sr. H. Luns, Ministro de Relaciones Exteriores de Holanda. El otro funciona en el Panteón de París, y es el péndulo original de Foucault, reinstalado en octubre de 1995.

El impacto del experimento de Foucault fue enorme, ya que se refería a uno de los problemas más fascinantes de la Ciencia posterior al siglo XVII. Una historia apócrifa nos dice que cuando Galileo fue obligado a abjurar de sus creencias ante la Inquisición Romana murmuró “Eppur si muove”. A pesar de su falsedad, esta frase tocaba la principal objeción al Sistema Heliocéntrico. ¿Cómo se puede probar que la Tierra realmente gira alrededor de su eje y alrededor del Sol? El principal argumento conceptual contrario al modelo Heliocéntrico radicaba en que las velocidades eran enormes. Por ejemplo, siendo que la circunferencia de la Tierra en el ecuador es de aproximadamente 40000 kilómetros, la velocidad de rotación debía ser igual a distancia / tiempo = 40000 km / 24 horas = 1670 km/hr. La velocidad de



revolución alrededor del Sol es aún mayor. El radio de la órbita terrestre es de 1 unidad astronómica, es decir $R \approx 150,000,000$ kilómetros. Esto hace una circunferencia de $2\pi R \approx 942,000,000$ kilómetros. Y como el tiempo que tarda en completar una órbita es de 365.2422 días (= 8766 horas), la velocidad de revolución es Distancia / Tiempo $\approx 942,000,000 \text{ km} / 8766 \text{ hr} \approx 107,000 \text{ km/hr} \approx 30 \text{ km/sec}$. En el tiempo que se tarda en leer esta frase (digamos 10 segundos), la Tierra ha recorrido 300 kilómetros. ¿Cómo podía semejante efecto ser imperceptible? En comparación, los medios de movilidad más rápidos de la época sólo podían recorrer unas pocas decenas de kilómetros en una hora.

Uno de los primeros intentos por demostrar la revolución de la Tierra alrededor del Sol se basó en la medición del paralaje estelar. La idea era que en 6 meses, la Tierra se mueve unas 2 unidades astronómicas en el espacio, y por lo tanto se deberían observar corrimientos en las posiciones de las estrellas cercanas. Pero este paralaje no pudo ser observado. Esto fue un duro revés para los defensores del modelo heliocéntrico, a pesar de que ensayaron una justificación al decir que las estrellas debían estar muy lejos como para poder producir un efecto observable. De hecho, esto era cierto. Todos los paralajes estelares son menores a un segundo de arco. El mayor paralaje corresponde a Alfa Centauri, con 0.76 segundos. Por otra parte, las mejores observaciones de la época correspondían a las mediciones a ojo desnudo de Tycho Brahe, y alcanzaban entre 1 y 2 minutos de arco, es decir aproximadamente 100 veces más. La primera observación de un paralaje estelar fue realizada sobre la estrella 61 Cygni por el astrónomo Friedrich Wilhelm Bessel, utilizando un telescopio. El paralaje de 61 Cygni es de 0.3 segundos. En la actualidad, es posible medir paralajes con una precisión de 1 microsegundo, utilizando técnicas interferométricas.

Sin embargo, la primera demostración de la revolución de la Tierra no fue provista por la medición de Bessel, sino por la observación de la aberración de la luz estelar por James Bradley en 1728. El paralaje permanecería como una meta inalcanzable por otros cien años, a pesar de que constituía una de las grandes obsesiones de la astronomía de aquel período.

Pero el experimento de Foucault traía una nueva dimensión al problema.

No sólo demostraba que la Tierra estaba girando debajo del péndulo, sino que por primera vez ¡lo hacía en un cuarto cerrado!³

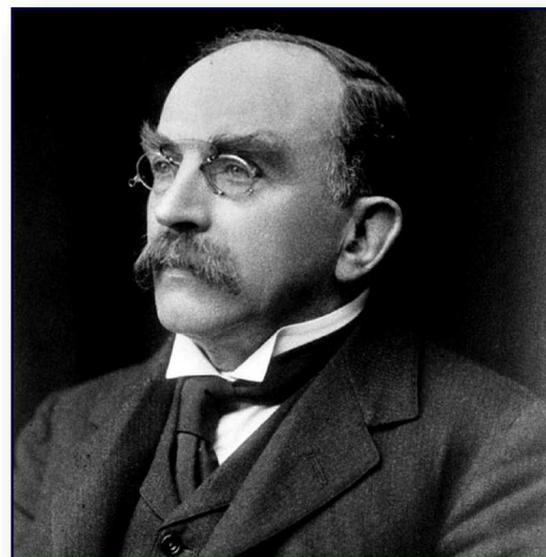


Figura 14. Nacido el 11 de julio de 1857 en Magheragall, Condado de Antrim, Joseph Larmor pasó casi toda su vida en Cambridge, donde se graduó en 1880 y llegó a ocupar la silla Lucasiana en 1903, dejada vacante al fallecer Stokes en febrero de ese año. Al abandonar esa posición en 1932 fue sucedido por Dirac. Los últimos años de su vida los pasó en su país natal, en Holywood, Condado de Down, hasta su fallecimiento el 19 de mayo de 1942. Era tímido y solitario por naturaleza, solterón empedernido, y de temperamento conservador. Se recuerda que en 1920, siendo miembro del Consejo del Colegio St John, se opuso a la instalación de baños. Precisamente dijo: “Nos hemos arreglado sin ellos durante 400 años, ¿porqué comenzar ahora?”

3.4. El efecto Larmor

Una partícula de carga q moviéndose en presencia de un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ experimenta una fuerza proporcional a su velocidad y per-



pendicular a ella,

$$\mathbf{F}_{\text{magnética}} = q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} .$$

Si consideramos el desplazamiento de esta partícula, pero visto desde un sistema de referencia rotante con velocidad angular $\vec{\omega}$, tenemos que

$$\mathbf{F}_{\text{magnética}} = q (\dot{\mathbf{r}} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} .$$

La ecuación de movimiento de la partícula en presencia de este campo magnético y de una fuerza arbitraria \mathbf{f} se escribe

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{f} + \mathbf{F}_{\text{magnética}} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{f} - (q\mathbf{B} + 2m\vec{\omega}) \times \dot{\mathbf{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r} - (q\mathbf{B} + m\vec{\omega}) \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) . \end{aligned}$$

Vemos que se da una interesante relación, ya que la fuerza producida por un campo magnético tiene componentes con precisamente la misma forma que la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga. Si elegimos

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{2m} \mathbf{B} ,$$

podemos anular el primer término, y reducir el último a la mitad, resultando

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f} + \frac{q}{2} \dot{\mathbf{B}} \times \mathbf{r} + \frac{1}{m} \left(\frac{q}{2}\right)^2 \mathbf{B} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) .$$

Consideremos ahora que el campo magnético es suficientemente débil, como para que el término cuadrático sea despreciable frente a la fuerza aplicada \mathbf{f} . También supondremos que su dependencia temporal es suficientemente suave como para poder despreciar el segundo término. Si se cumplen tales condiciones obtenemos

$$m\ddot{\mathbf{r}} \approx \mathbf{f} .$$

Pero esta es justamente la ecuación de movimiento en ausencia del campo magnético. La conclusión que obtenemos de este resultado es que, visto desde un sistema inercial, el efecto de un campo magnético débil es producir

una lenta precesión de la trayectoria con una velocidad angular $\vec{\omega}$. Esta frecuencia angular,

$$\omega_L = \frac{qB}{2m} ,$$

se denomina *frecuencia de Larmor*, en honor del descubridor de este efecto, el físico irlandés Joseph Larmor.

El efecto Larmor produce cambios observables en los espectros de emisión por átomos en presencia de campos magnéticos, debido a la modificación que producen en los momentos angulares de los niveles atómicos. Este cambio de las líneas espectrales se denomina “efecto Zeeman”.

4. Fuerza centrífuga

La fuerza centrífuga⁴,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{centrífuga}} &= -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= -m(\vec{\omega} \cdot \mathbf{r})\vec{\omega} - \omega^2 \mathbf{r} , \end{aligned}$$

es normal tanto al eje de rotación $\hat{\omega}$ como a la velocidad tangencial $\vec{\omega} \times \mathbf{r}$. Como además el signo es positivo, esta fuerza aparente es normal al eje de rotación y dirigida hacia afuera, de allí el nombre de centrífuga.

En la Tierra, esta fuerza es nula en los polos y máxima en el ecuador, donde toma un valor de aproximadamente 0.0034 m / seg². En realidad, la diferencia entre la aceleración de la gravedad en los polos respecto del ecuador es aproximadamente de 0.052 m / seg², lo que se debe a que la Tierra no es una esfera perfecta sino que está achatada en los polos. De hecho, el radio en el ecuador es aproximadamente 21 kilómetros mayor que en los polos. Estos dos efectos no son independientes, ya que el achatamiento de la Tierra en los polos es consecuencia de su rotación. Además, la fuerza centrífuga produce una desviación de la gravedad *aparente* en un ángulo igual a

$$\alpha \approx \frac{F_{\text{horizontal}}}{F_{\text{vertical}}} = \frac{m\omega^2 r \sin \theta \cos \theta}{mg - m\omega^2 r \sin^2 \theta} \approx \frac{\omega^2 r}{g} \sin \theta \cos \theta ,$$



que toma su valor máximo para $\theta = 45^\circ$, y que es igual a aproximadamente 6 minutos de arco.

La Ciencia Ficción ha utilizado repetidamente la idea de una nave o una estación orbital que, girando sobre su eje, puede producir un efecto de gravedad aparente. Para que una estación orbital de 100 metros de diámetro (d) alcance una gravedad aparente de $g = 9.8m/seg^2$ en su periferia necesitaría girar con un período de aproximadamente $T = 2\pi\sqrt{d/2g} = 14$ segundos. Es decir que debería completar cuatro vueltas por minuto.

Notas

¹A partir de este punto, comenzamos a utilizar una notación muy usual, v.g. $da/dt = \dot{a}$

²Correspondencia entre Isaac Newton y Robert Hooke (1679-1680).

³Al año siguiente, Foucault repitió el experimento, pero utilizando esta vez un rotor muy masivo. ¡Foucault había inventado el giroscopio!

⁴Aquí estamos usando la regla “BACa menos CABallo”, que permite transformar un triple producto vectorial: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.

